直交選点有限要素法の開発

―　定常のナビエ・ストークス方程式の定式化　―

函館高専　　正会員　○大久保　孝樹
函館高専　　学生員　　蛯子　　翼

１．はじめに

本研究の目的は，工学や理学の分野で用いられている偏微分方程式の数値計算手法として，新規の直交選点有限要素法の応用性を確認することである．ここでは，流体力学で知られている定常のナビエ・ストークスの方程式を直交選点有限要素法によって定式化を行った．

直交選点法は，1930 年代 Lanczos が選点法の選点配置を直交多項式の根の値として選点位置を規定したことにより，低次の解であっても直交選点においてほぼ正解に近い値が得られることが分かり，コンピュータの発達していなかったこの年代の有力な数値計算手法として用いられていた．直交選点法は，初期値問題として 1930～1960 年代 Clenshaw, Norton, Wright らによって用いられ，その後 1960 年代 Villadsen, Stewart らによって境界値問題に応用されるに至った．

この数値計算手法において，低次から高次の直交選点法を一領域に用いるだけでなく，多要素領域の重ね合わせができる有限要素化を可能にし，さらに任意の四角形要素でも有限要素化できる座標変換マトリックスの定式化等を可能にした．1930 年代の低次でも直交選点においてほぼ正解が得られるという事実は，現在のコンピュータの機能を考えれば，自動的に高次化できる直交選点法と有限要素化の融合を可能にしたことを基に，さらに発展できる可能性を持っている．また，他の分野への応用例がほとんどなく，今後，他の分野の方々と協力できることを願っている．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\
&u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-p+\frac{2}{R_e}\frac{\partial u}{\partial x}\right)l+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)m=\text{隣接要素}\\
&\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)l+\left(-p+\frac{2}{R_e}\frac{\partial v}{\partial y}\right)m=\text{隣接要素}\\
&\frac{\partial p}{\partial x}l+\frac{\partial p}{\partial y}m=\text{隣接要素}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

２．直交選点法によるナビエ・ストークス方程式の定式化

２次元の無次元化ナビエ・ストークス方程式と要素境界の条件はそれぞれ(1)(2)式によって表される．(1)(2)式を直交多項式で近似表現するために，u,v,p を(3)式のような多項式として仮定すると，偏微分は(4)のように計算される．数値解として多項式の係数ｄを求めることと各直交選点における u,v,p を求めることとは同等であることから，(5)式のように偏微分を直交選点における u,v,p によって表現できる．(ここでは u のみについて記している)　ここで、A、B、C は微分作用素行列となる．

$$
\left[
\begin{aligned}
u&=\sum_{i=1}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=1}x^{i-1}y^{j-1}d_{uij}\\
v&=\sum_{i=1}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=1}x^{i-1}y^{j-1}d_{vij}\\
P&=\sum_{i=1}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=1}x^{i-1}y^{j-1}d_{Pij}
\end{aligned}
\right.
\qquad (3)
$$

$$
\left[
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_l&=\sum_{i=2}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=1}(i-1)x_l^{i-2}y_l^{j-1}d_{uij}\\
\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_l&=\sum_{i=1}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=2}(j-1)x_l^{i-1}y_l^{j-2}d_{uij}\\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_l&=\sum_{i=3}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=1}(i-1)(i-1)x_l^{i-3}y_l^{j-1}d_{uij}\\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_l&=\sum_{i=1}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=3}(j-1)(j-1)x_l^{i-1}y_l^{j-3}d_{uij}\\
\left.\frac{\partial u}{\partial x\partial y}\right|_l&=\sum_{i=2}^{n_1+2n_2+2}\sum_{j=2}(i-1)(j-1)x_l^{i-2}y_l^{j-2}d_{uij}
\end{aligned}
\right.
\qquad (4)
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}&=\overline{\overline{D_x}}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}\bar{u}=\overline{\overline{A_x}}\bar{u}\\
\overline{\frac{\partial u}{\partial y}}&=\overline{\overline{D_y}}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}\bar{u}=\overline{\overline{A_\eta}}\bar{u}\\
\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}&=\overline{\overline{E_x}}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}\bar{u}=\overline{\overline{B_x}}\bar{u}\\
\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}&=\overline{\overline{E_y}}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}\bar{u}=\overline{\overline{B_y}}\bar{u}\\
\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}}&=\overline{\overline{F_{xy}}}\,\overline{\overline{Q}}^{-1}\bar{u}=\overline{\overline{C_{xy}}}\bar{u}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

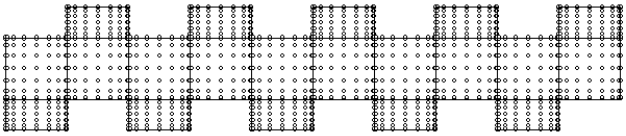
$$
\begin{aligned}
Q_{lm}&=x_l^{i-1}y_m^{j-1}\\
D_{x\,l\,m}&=(i-1)x_l^{i-2}y_m^{i-1}\\
D_{y\,l\,m}&=(j-1)x_l^{i-1}y_m^{i-2}\\
E_{x\,l\,m}&=(i-1)(i-2)x_l^{i-3}y_m^{i-1}\\
E_{y\,l\,m}&=(j-1)(j-2)x_l^{i-1}y_m^{i-3}\\
F_{xy\,l\,m}&=(i-1)(j-1)x_l^{i-2}y_m^{i-2}
\end{aligned}
$$

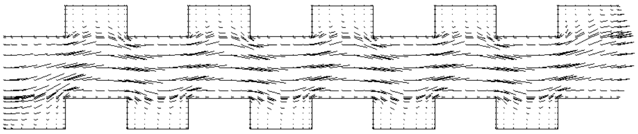
(5)式を用いて(1)(2)式を定式化すると(6)(7)式のように表示される．

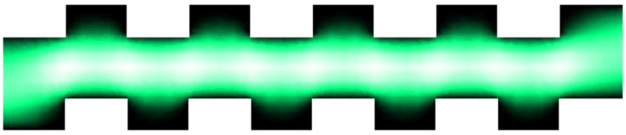
$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}u_j+\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}v_j=0\\
&u_i\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}u_j+v_i\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}u_j=-\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}P_j+\frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian}B_{xij}u_j+\sum_{j=1}^{ian}B_{yij}u_j\right)\\
&u_i\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}v_j+v_i\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}v_j=-\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}P_j+\frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian}B_{xij}v_j+\sum_{j=1}^{ian}B_{yij}v_j\right)
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(-P_i+\frac{2}{R}\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}u_j\right)l+\frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}u_j+\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}v_j\right)m\right]=\text{隣接要素}\\
&\left[\frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}u_j+\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}v_j\right)l+\left(-P_i+\frac{2}{R}\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}v_j\right)m\right]^1=\text{隣接要素}\\
&\left[\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}P_jl+\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}P_jm\right]^1=\text{隣接要素}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

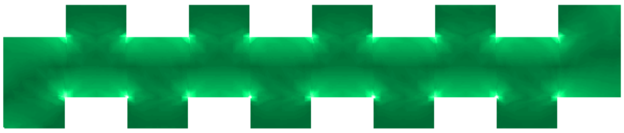
キーワード：数値解析，偏微分方程式，ナビエ・ストークス方定式，直交選点有限要素法，直交選点法，有限要素法
連絡先：〒042－8501　函館市戸倉町 14－1　函館工業高等専門学校環境都市工学科大久保研究室　TEL 0138-59-6487


図－1　水路モデルの要素選点配置


図－3　流速ベクトル図（無次元）


図－4　流速分布図（無次元）


図－5　圧力分布図（無次元）

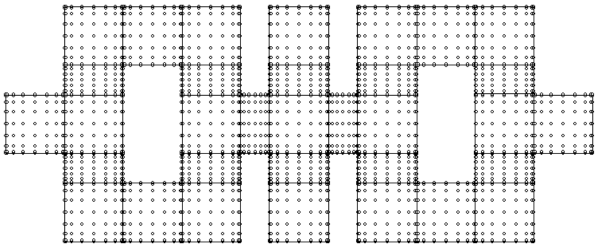

図－6　渦度分布図（無次元）

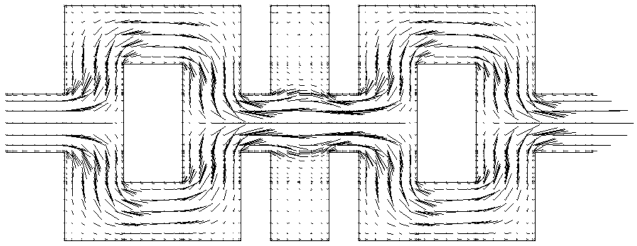
３．有限要素化

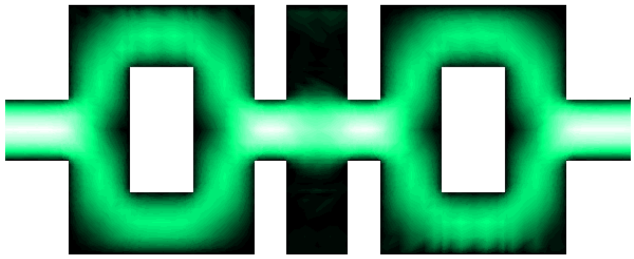
直交選点法は 1 矩形領域について解析する手法であり，本研究ではこの矩形要素を(7)式の要素境界条件を用いて多要素に重ね合わせる有限要素化を可能にした．要素に配置される直交選点は，要素境界上の外部選点と要素内部に配置される内部選点がある．外部選点上では，要素境界条件のみが満たされており，ナビエ・ストークス方程式は満足されておらず，内部選点のみで満足されている．要素の重ねあわせで四隅の点では二つ以上の重ねあわせが生じ，要素 3，4 個の重ねあわせでは条件が多くなるが，どれか一つの要素境界条件を満足すると全てが満足されることが経験的に分かっている．しかし，このことは数学的に証明する必要性があると考えられる．

4．計算結果

図－1, 図－2 は 2 次元水路モデルにおける要素選点配置を示したものである．一要素の選点数は 81 個(9×9)で, 内部選点数は 49 個(7×7)である．この数値計算に用いた直交多項式はルジャンドルの多項式であり，2 次元多項式の次数は 64 次(8×8)となっている．計算では、非線形の連立方程式を解くことになり，ここではニュートン・ラフソン法を用いた．本研究で設定したレイノルズ数は Re=1000～5000000 であり, いずれも相対誤差


図－2　水路モデルの要素選点配置


図－7　流速ベクトル図（無次元）


図－8　流速分布図（無次元）


図－9　圧力分布図（無次元）

1×10^{-6}以内に収束している．ここに示した結果は，Re=5000000 の場合で，圧力等に特異な結果が出たために提出した．

図－3～図－6 は単一水路の結果であるが, 圧力において水路内部で高圧部と低圧部が不連続に生じる現象が現れ，物理的に説明することは難しいと思われるが，相対誤差も十分満足している結果であり，何かしらの意味があるものと考えられるので御教示願いたい．単なる数値上の誤差の蓄積あるいは桁落ちの影響とも考えられる．図－7～図－9 は二水路の分岐と合流を有する水路であるが, 圧力と流速分布で非対称の現象が生じている．何らかの数値計算上の乱れが生じ，非対称の現象に収束したものと考えられる．

参考文献

B.A.フィンレイソン著、鷲津久一郎・山本善之・川合忠彦共訳　The Method Weighted Residuals and Variational Principles　「重みつき残差法と変分原理および流体力学・伝熱・物質移動への影響」　培風館