

## 不変埋め込み法による非線形復元力特性推定

武蔵工業大学 正会員 丸山 収

## 1. はじめに

本研究では、特定の数式モデルを用いることなく地震時復元力特性を同定する手法について検討した。ここでは、復元力特性同定のために設定した2次形式の評価関数を最小とすることにより、Euler-Lagrange 式で与えられる2点境界値問題へと定式化を行い、不変埋め込み法により効率的に解く手法を提案している。本研究の有効性は、事前に復元力特性の挙動を表現するモデルを必要としない点であり、加えて同一の定式化により任意の復元力特性を同定できる点である。計算例は講演時に示すこととして、以下に理論の概要を述べる。

## 2. 対象構造系

本研究で対象とする  $n$  自由度非線形系の支配方程式を次式で与える。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{K}\Phi(t) = -\mathbf{M}\mathbf{E}\ddot{\mathbf{U}}(t) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Z}(t)$ ：相対変位応答， $\mathbf{M}$ ：質量行列， $\mathbf{C}$ ：減衰係数行列， $\mathbf{K}$ ：初期剛性行列， $\Phi(t)=[\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)]^T$ ：復元力特性ベクトル， $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ ：地震入力加速度， $\mathbf{E}$ ：入力係数行列である。式(1)の振動方程式より次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}(t) \\ \ddot{\mathbf{Z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(t) \\ \dot{\mathbf{Z}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix} \Phi(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}(t) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ ：単位行列である。

次に各質点の変位、速度応答、復元力特性および地震入力を  $\mathbf{X}(t)=[\mathbf{Z}(t), \dot{\mathbf{Z}}(t), \Phi(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)]^T$  と状態空間表示し、復元力特性同定のための状態方程式を次式で与える。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}\mathbf{d}(t) \quad (3)$$

$$\text{ここで、} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{G}=[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{1}]^T$ ：係数行列， $\mathbf{d}(t)=[\Phi(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)]^T$ である。

式(3)の左辺  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  は状態ベクトルの時間微分を表し、 $\dot{\mathbf{X}}(t)=[\dot{\mathbf{Z}}(t), \ddot{\mathbf{Z}}(t), \dot{\Phi}(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)]^T$  となる。ここで、式(3)の右辺第1項  $\mathbf{A}\mathbf{X}(t)$  に着目すると、復元力特性  $\Phi(t)$  と入力  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  の時間微分  $\dot{\Phi}(t)$  と  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  が0となるように定式化している。その代わりに時間関数  $\mathbf{d}(t)$  に関する第2項を与えている。復元力特性行列  $\Phi(t)$  の挙動を表現する数式モデルを与えれば、モデルから各時刻の微分係数を要素とするヤコビアン行列が計算できるので、ニュートン法、拡張カルマンフィルタなどの同定手法の適用が可能となる。本研究では、 $\mathbf{d}(t)$  の成分である  $\Phi(t)$  および  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  に対して時間関数であること以外に、特定の数式モデルを仮定することなく議論を行う。その結果、同定問題の状態方程式は式(3)に示すように線形関係式となる。

一方、観測方程式を次式で与える。

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{C}$ ：観測量の係数行列， $\mathbf{V}(t)$ ：観測ノイズ。

## 3. 同定問題の評価関数

同定問題の定式化を行うために、次式で与えられる時刻  $t$  における2次形式の関数を考える。

$$\mathbf{L}[\mathbf{X}(t), \mathbf{d}(t)] = (\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{X}(t))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{X}(t)) + \mathbf{d}^T(t) \mathbf{W} \mathbf{d}(t) \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{W}$ ：重み行列である。

式(5)に式(3)により与えられる拘束条件を考慮し、時間方向の積分値を最小とする問題を考える。

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{ \mathbf{L}[\mathbf{X}(\tau), \mathbf{d}(\tau)] + \lambda^T(\tau) (\mathbf{A}\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{G}\mathbf{d}(\tau) - \dot{\mathbf{X}}(\tau)) \} d\tau \rightarrow \min. \quad (6)$$

ここで、 $t_0$ ：初期時刻， $t_f$ ：終端時刻であり、 $\lambda(\tau)$ ：Lagrange の未定乗数である。

式(6)の最小化を行うことで、以下の連立微分方程式を得る。ここで境界条件は、 $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$  として与えられる場合を考えると、 $\lambda(t_f) = 0$  であり、一方  $\mathbf{X}(t_f)$ 、 $\lambda(t_0)$  は未定の2点境界値問題となる。

キーワード システム同定、復元力特性、不変埋め込み法、劣化診断

連絡先 〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1 武蔵工業大学工学部都市基盤工学科 TEL 03-3703-3111

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{G}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -2\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}(t) - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) + 2\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}(t) \quad (8)$$

#### 4. 不変埋め込み法による境界値問題の解法<sup>1)</sup>

式(7)および式(8)を、一般的に次式のように表現する.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \quad (10)$$

前述した  $\mathbf{X}(t)$  と  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  の初期条件および終端条件をまとめると以下ようになる. 本研究では, 状態量の初期条件  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$  とする.

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 = \mathbf{0} \text{ (既知)}, \mathbf{X}(t_f) = \mathbf{X}_f \text{ (未知)} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}_0 \text{ (未知)}, \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{\lambda}_f = \mathbf{0} \text{ (既知)}$$

さて, 終端時刻における既知の境界条件  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$  を固定して考えれば, 欠落初期条件  $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$  は, 式(10)より, 始点  $t_0$  における  $\mathbf{X}(t_0)$  の関数であると考えることができる. 始点  $t = t_0$  を一般化して  $t = \tau (\leq t_f)$  とすれば, 欠落初期条件は,  $\tau$  と  $\mathbf{X}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$  の関数で与えられる.

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}) \quad (12)$$

また,  $\tau = t_f$  では, 次式が成り立つ.

$$\boldsymbol{\lambda}_0(t_f, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{\lambda}_f \quad (13)$$

時間刻み  $\Delta t$  として, 隣り合う2点  $t = \tau$  と  $t = \tau + \Delta t$  では, テーラー展開により, 次式のように表現される.

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau + \Delta t) = \boldsymbol{\lambda}(\tau) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau)\Delta t + \text{H.O.T.} \quad (14)$$

始点を一般化して  $\tau$  としていることから

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}) \text{ として, 式(10)より,}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau) &= \mathbf{g}(\mathbf{X}(\tau), \boldsymbol{\lambda}(\tau)) \\ &= \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi})) \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)を式(14)に代入して,

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau + \Delta t) = \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}))\Delta t + \text{H.O.T.} \quad (16)$$

一方, 式(16)の左辺は次式で表される.

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau + \Delta t) = \boldsymbol{\lambda}_0(\tau + \Delta t, \mathbf{X}(\tau + \Delta t)) \quad (17)$$

式(17)の  $\mathbf{X}(\tau + \Delta t)$  を  $\mathbf{X}(\tau)$  の近傍でテーラー展開する.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\tau + \Delta t) &= \mathbf{X}(\tau) + \dot{\mathbf{X}}(\tau)\Delta t + \text{H.O.T.} \\ &= \boldsymbol{\xi} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}))\Delta t + \text{H.O.T.} \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)を式(17)に代入し, 式(16)の右辺と等しいと置く. その際, 2次以上の高次項を省略すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}))\Delta t \\ = \boldsymbol{\lambda}_0(\tau + \Delta t, \boldsymbol{\xi} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}))\Delta t) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで,  $\Delta \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}))\Delta t$  とおくと,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi}))\Delta t \\ = \boldsymbol{\lambda}_0(\tau + \Delta t, \boldsymbol{\xi} + \Delta \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)の右辺を展開し, 2次以上の高次項を省略すると次式を得る.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi})}{\partial \tau} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi})) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_0(\tau, \boldsymbol{\xi})) \quad (21)$$

さらに式(9)および式(10)を用いて式(21)を具体的に表現すると, 2点境界値問題を初期値問題に変換する不変埋め込み方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{G}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}(t)] \\ = -2\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}(t) - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) + 2\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)は, 終端条件で  $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{\lambda}_f$  が与えられたときに, これに到達するように, 隣り合う時刻  $\tau$  と  $\tau + \Delta t$  で与えなければならない欠落初期条件との関係式を示すものである.

本研究で対象とする問題では, 式(9)および式(10)が,  $\mathbf{X}(t)$  と  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  に関する線形連立微分方程式であるので, リッカチ変換より以下のようにおくことができる.

$$\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (23)$$

式(23)を, 式(22)に代入し, 状態量の如何にかかわらず式(22)が成り立つための条件式が得られる. 式(23)において  $\mathbf{Q}(t)$  は式(24)のリッカチ方程式の解,  $\mathbf{w}(t)$  は式(25)の微分方程式の解である.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(t) &= -\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{Q}(t)\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{Q}(t) \\ &\quad - 2\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = -[\mathbf{A}^T + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}^T]\mathbf{w}(t) + 2\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}(t) \quad (25)$$

ここで, 式(24)において, 終端時刻では  $\boldsymbol{\lambda}(t_f, \mathbf{X}_f) = \mathbf{0}$  であるから, 式(24)を終端時刻  $\mathbf{Q}(t_f) = \mathbf{0}$  として時間方向  $t_f \rightarrow t_0$  に解き  $\mathbf{Q}(t)$  の時系列を求める. 次に,  $\mathbf{Q}(t)$  が求められているので, 式(25)を終端時刻  $\mathbf{w}(t_f) = \mathbf{0}$  として時間方向  $t_f \rightarrow t_0$  に向かって解き  $\mathbf{w}(t_0)$  を求めると  $\boldsymbol{\lambda}(t_0, \mathbf{X}(t_0)) = \mathbf{Q}(t_0)\mathbf{X}(t_0) + \mathbf{w}(t_0)$  により, 式(11)の欠落初期条件  $\boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{\lambda}(t_0, \mathbf{X}(t_0))$  を求めることができる.

以上により, 欠落初期条件  $\boldsymbol{\lambda}_0$  が求められるので, 式(24)と式(25)の連立微分方程式を初期条件  $\mathbf{X}(t_0)$  および  $\boldsymbol{\lambda}_0$  として, 時間方向  $t_0 \rightarrow t_f$  に解くことにより, 状態量  $\mathbf{X}(t)$  の推定値を求めることができる.

参考文献: 1)日野幹夫: 境界値問題の解法, 朝倉書店, 1981