領域積分方程式を用いた音響場の媒質の揺らぎの推定手法について

東京理科大学大学院 理工学研究科　学生会員 飯島貴男*
東京理科大学 理工学部　正会員 東平光生

1　はじめに

著者の一人は先に，領域積分方程式に Fourier 積分変換を施す離散化手法を提示した [2]．Fourier 積分変換された積分方程式は，離散化によって，スパースな行列を生成するばかりでなく，以下に示すように Green 関数と散乱波のスペクトルを既知量として波動場の揺らぎのスペクトルを推定することも可能になると考えられる．本論文では，Fourier 積分変換された領域積分方程式を出発点として媒質の揺らぎのスペクトルの推定手法ならびに，そこから媒質の揺らぎの空間特性を推定する手法を展開する．

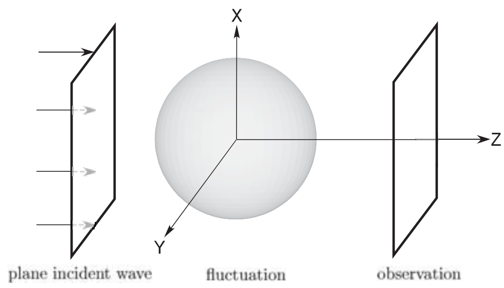

図 1: 本論文で扱う問題

2　領域積分方程式の Fourier 積分変換について

本論文では，図 1 に示すように，平面波が媒質の揺らぎ領域を通過する問題を扱う．ただし，媒質の揺らぎは未知であり，そのかわりに散乱波は既知とする．この波動場は次の領域積分方程式 [1] で表現できる．

$$u(\vec{x}) = \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) - \int_{\mathbf{R^3}} g(\vec{x},\vec{y})q(\vec{y})u(\vec{y})d\vec{y} \tag{1}$$

ここに，u は音響場の速度ポテンシャル，$\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x})$ は平面入射波，$q(\vec{y})$ は媒質の揺らぎを記述する関数，$\vec{x}$ は 3 次元ユークリッド空間のベクトル，$\vec{k}$ は波数ベクトルを表わす．また，$\vec{k}\cdot\vec{x}$ はベクトル $\vec{k}$ と $\vec{x}$ の内積である．また，$g(\vec{x},\vec{y})$ は Green 関数であり，次式で与えられる．

$$g(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\exp(-ik|\vec{x}-\vec{y}|)}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{2}$$

式 (1) を散乱波

$$u_s(\vec{x}) = u(\vec{x}) - \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) \tag{3}$$

に関するものに書き換えると，次のようになる．

$$u_s(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \int_{\mathbf{R^3}} g(\vec{x},\vec{y})q(\vec{y})u_s(\vec{y})d\vec{y} \tag{4}$$

ここに，

$$f(\vec{x}) = -\int_{\mathbf{R^3}} g(\vec{x},\vec{y})q(\vec{y})\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{y})d\vec{y} \tag{5}$$

である．

次に，式 (4) を Fourier 変換を施し，媒質の揺らぎのスペクトルの方程式に変換する．ここで，Green 関数の Fourier 変換について考える．Green 関数の Fourier 変換を

$$\hat{g}(\vec{\xi},\vec{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\mathbf{R^3}} g(\vec{x},\vec{y})\exp(-i\vec{\xi}\cdot\vec{x})d\vec{x} \tag{6}$$

で定義する．ここに，$\vec{\xi}$ は波数空間の座標であり，$\vec{\xi}\cdot\vec{x}$ は $\vec{\xi}$ と $\vec{x}$ の内積である．このとき，Green 関数の Fourier 変換は次のようになる．

$$\hat{g}(\vec{\xi},\vec{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{\exp(i\vec{\xi}\cdot\vec{y})}{\xi^2 - k^2 + i\epsilon} \tag{7}$$

ここに，$\xi^2 = |\vec{\xi}|^2$，ϵ は無限小の正数，記号 ^ は Fourier 変換を表わす．今後の展開を簡潔にするために，関数 $\hat{h}(\vec{\xi})$ を次のように定義しておく．

$$\hat{h}(\vec{\xi}) = \frac{1}{\xi^2 - k^2 + i\epsilon} \tag{8}$$

これにより，式 (4) の右辺第 1 項は次のように変換される．

$$\hat{f}(\vec{\xi}) = -\hat{h}(\vec{\xi})\hat{q}(\vec{\xi}+\vec{k}) \tag{9}$$

また，式 (4) の右辺第 2 項については，関数 $w(\vec{y})$ を

$$w(\vec{y}) = q(\vec{y})u_s(\vec{y}) \tag{10}$$

と定義することで，$\hat{h}(\vec{\xi})\hat{w}(\vec{\xi})$ と表現できる．以上より，波数領域での領域積分方程式は次のようになる [2]．

$$\hat{u}_s(\vec{\xi}) = -\hat{h}(\vec{\xi})\hat{q}(\vec{\xi}+\vec{k}) - \hat{h}(\vec{\xi})\hat{w}(\vec{\xi}) \tag{11}$$

3　媒質の揺らぎの推定手法

式 (11) を，媒質の揺らぎを求める方程式に変換する．まず式 (11) の両辺を，$-\hat{h}(\vec{\xi})$ で割ることにより，次式を得る．

$$\hat{F}(\vec{\xi}) = \hat{q}(\vec{\xi}+\vec{k}) + \hat{w}(\vec{\xi}) \tag{12}$$

*Email a7605602@rs.noda.tus.ac.jp
キーワード：領域積分方程式，揺らぎの推定，Fourier 変換

ここに，

$$\hat{F}(\vec{\xi}) = -\frac{\hat{u}_s(\vec{\xi})}{\hat{h}(\vec{\xi})} \tag{13}$$

である．次に，式 (12) を Haar 基底により離散化する．Haar 基底は Haar のスケーリング関数 [3] より構成する．式 (12) の各項を

$$\hat{F}(\vec{\xi}) = \sum_\alpha \hat{F}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}) \tag{14}$$

$$\hat{q}(\vec{\xi}+\vec{k}) = \sum_\alpha \hat{Q}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}) \tag{15}$$

$$\hat{w}(\vec{\xi}) = \sum_\alpha \hat{w}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}) \tag{16}$$

と展開すれば，式 (12) は

$$\hat{F}_\alpha = \hat{Q}_\alpha + \hat{w}_\alpha \tag{17}$$

となる．ただし，$\phi_\alpha(\vec{s})$ は Haar 基底であり，添え字 α は Haar 基底の番号を表わす．また，$\vec{s}$ は $\vec{\xi} = k\vec{s}$ で定義される無次元化された波数空間の座標である．式 (17) は，散乱波を既知としているので，散乱波を Green 関数で除して得られる $\hat{F}_\alpha$ は既知量となることに注意する．

次に，式 (17) の右辺を媒質の揺らぎのスペクトルと関連付けることを考える．このために，

$$\hat{q}(\vec{\xi}) = \sum_\alpha \hat{q}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}) \tag{18}$$

と展開する．このとき

$$\hat{q}(\vec{\xi}+\vec{k}) = \sum_\alpha \hat{q}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}+\vec{e}) \tag{19}$$

となる．ただし，$\vec{e} = \vec{k}/k$ である．式 (15) で展開された $\hat{q}(\vec{\xi}+\vec{k})$ の展開と比較することで

$$\hat{Q}_\alpha = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \hat{q}_\beta \tag{20}$$

を得ることが分かる．ただし

$$S_{\alpha\beta} = \left\langle \phi_\alpha(\vec{s}), \phi_\beta(\vec{s}+\vec{e}) \right\rangle \tag{21}$$

であり，$S_{\alpha\beta}$ に関する積分は，Fourier 変換のユニタリ性を用いれば，あまり困難なく実行できる．また，$\hat{w}_\alpha$ については，論文 [2] を参照することで

$$\hat{w}_\alpha = \sum_\beta \sum_\gamma D_{\alpha\beta\gamma} \hat{q}_\beta \hat{u}_\gamma \tag{22}$$

と表わされることが分かる．散乱波成分が既知の場合は，γ で縮約することで

$$\hat{w}_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta} \hat{q}_\beta \tag{23}$$

とすることができる．従って，式 (12) は

$$\hat{F}_\alpha = \sum_\beta \big(S_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}\big) \hat{q}_\beta \tag{24}$$

となり，散乱波から媒質の揺らぎのスペクトルを求めるための連立一次方程式となる．媒質の揺らぎのスペクトルが求められれば，式 (18) の Fourier 逆変換を用いて

$$q(\vec{x}) = k^3 \sum_\alpha \hat{q}_\alpha \check{\phi}_\alpha(k\vec{x}) \tag{25}$$

として，揺らぎの空間分布を求めることができる．

4　おわりに

本論文では，Fourier 積分変換された領域積分方程式を用いて媒質の揺らぎの推定手法を展開した．Fourier 変換された領域積分方程式は，Green 関数のスペクトル，媒質の揺らぎのスペクトル，散乱波のスペクトルの相互の関係を明らかにする．また，媒質の揺らぎの推定手法の展開の過程では，二つの種類の行列 $S_{\alpha\beta}$ および $L_{\alpha\beta}$ が現れ，散乱波と媒質の揺らぎが結び付けられた．これらの行列の成分は Fourier 変換のユニタリ性を用いることで比較的容易に算定されると考えられる．展開手法の有効性を実証することが今後の課題である．

5　参考文献

1) Colton, D. and Kress, R.: Invers acoustic and electromagnetic scattering theory, Berlin, Springer, 1998.
2) 東平光生: 波数領域の定式化に基づく領域積分方程式の数値解法について, 土木学会論文集, No.808/I-74, pp.1-11, 2006.
3) Williams, J.R. and Amaratunga, K.: Introduction to wavelets in engineering, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.37, pp.2365-2388, 1994.