多次元 ARMA モデルを用いた常時微動による橋梁振動特性推定法と推定精度の検討

長崎大学工学部　学生員　○郝　婕馨　　長崎大学工学部　フェロー　岡林　隆敏
長崎県土木部　　正会員　　中　忠資

1.はじめに

近年，橋梁の維持管理の視点から，橋梁の遠隔自動振動計測が必要になっている．著者らは，これまで 1 点計測による高精度振動計測アルゴリズムと計測システムを提案[1)]してきた．本研究は，多点計測による橋梁振動特性(振動数･減衰定数･振動モード)の自動計測の手法とその有効性を検証したものである．ここでは，多次元ARMAモデル[2)]を用いた常時微動による橋梁振動特性推定法と推定精度の検討を行った．多次元ARMAモデルを用いることにより，観測点に対応する振動モードを容易に計測することができる．本論文では，ランガー橋の常時微動の数値シミュレーションを行い，得られた速度応答データより，振動特性を推定した．

2.多次元ARMAモデルの構成と係数の推定

構造モデルの各節点に外力が作用する場合の運動方程式は次式のように表すことができる．

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K}$ は質量マトリクス，減衰マトリクス，剛性マトリクス，　$\boldsymbol{f}(t)$ は外力ベクトルである．

(1)式を多次元 ARMA モデルで表現すると, 次式のようになる．

$$\boldsymbol{y}(k)+\sum_{s=1}^{p}\boldsymbol{G}_s\,\boldsymbol{y}(k-s)=\sum_{s=1}^{p}\boldsymbol{R}_s\,\boldsymbol{e}(k-s) \tag{2}$$

また，ARMA モデルは有限な多次元 AR モデルで近似することができる．

$$\boldsymbol{y}(k)+\sum_{s=1}^{p}\boldsymbol{G}_s\,\boldsymbol{y}(k-l)=\boldsymbol{e}(k) \tag{3}$$

次に，m 点の観測値を m 次元ベクトル $\hat{\boldsymbol{y}}(k)$ で表した場合，観測値の分散･共分散行列は次式となる．

$$\boldsymbol{R}(l)=\frac{1}{N}\boldsymbol{y}(k)\boldsymbol{y}^{T}(k-l),\ \boldsymbol{R}(-l)=\frac{1}{N}\boldsymbol{y}(k)\boldsymbol{y}^{T}(k+l) \tag{4}$$

(3)，(4)式より，Yule-Walker 方程式を行列表示すると，次式が得られる．

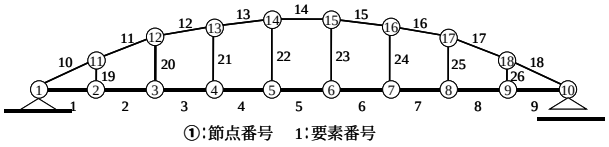
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}(0) & \Lambda & \boldsymbol{R}(p-1)\\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M}\\ \boldsymbol{R}^{T}(N)\Lambda & & \boldsymbol{R}(N-p+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1^{T}\\ \mathrm{M}\\ \boldsymbol{G}_p^{T}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^{T}(1)\\ \mathrm{M}\\ \boldsymbol{R}^{T}(N+1)\end{bmatrix} \tag{5}$$

(5)式より，可観測変換された状態方程式の係数行列 $\boldsymbol{A}$ の要素である $\boldsymbol{G}_1$～$\boldsymbol{G}_p$ が算出できる．

算出した $\boldsymbol{G}_1$～$\boldsymbol{G}_p$ より，次式の固有値方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \Lambda & \boldsymbol{0}\\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & & \mathrm{M}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \Lambda & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{G}_p & -\boldsymbol{G}_{p-1}\Lambda & & -\boldsymbol{G}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\ \boldsymbol{\Psi\Lambda}\\ \mathrm{M}\\ \boldsymbol{\Psi\Lambda}^{p-1}\end{bmatrix}=\Lambda\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\ \boldsymbol{\Psi\Lambda}\\ \mathrm{M}\\ \boldsymbol{\Psi\Lambda}^{p-1}\end{bmatrix} \tag{6}$$

(6)式を，$\boldsymbol{A\Psi}=\boldsymbol{\Lambda\Psi}$ として $\boldsymbol{A}$ の固有値解析を行うことにより，固有値と固有ベクトルが得られる．固有値の実数



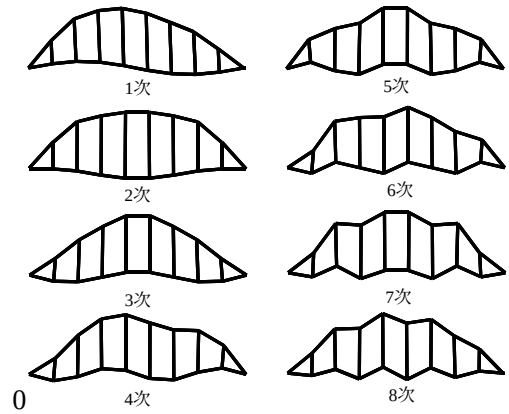
図－1　ランガー橋

表－1　ランガー橋諸元

形式		補剛桁橋
支間長	L (m)	58.995
ライズ	f (m)	9.36
補剛桁の断面積	A_1 (m²)	2.24×10^{-2}
拱助の断面積	A_2 (m²)	1.23×10^{-2}
曲げ剛性	EI (kN･m)	1.74×10^{4}
桁全重量	W (kN)	1.47×10^{3}
格間数		9

表－2　固有振動数

	固有振動数 (Hz)
1次	1.742
2次	2.558
3次	4.018
4次	6.355
5次	9.734
6次	13.61
7次	17.60
8次	20.76



図－2　固有値解析による振動モード

キーワード　多次元 ARMA モデル，振動特性自動推定，健全度評価
連絡先　　〒852-8521　長崎市文教町 1-14　長崎大学　TEL　095-847-1111

部分 X_{Re} と虚数部分 X_{Im} を用いて，Δ をサンプリング時間とすると，次のように固有円振動数 ω_k，減衰定数 h_k が得られる．

$$h_k\omega_k = (-1/\Delta)\ln\sqrt{X_{\mathrm{Re}}^2 + X_{\mathrm{Im}}^2}$$
$$\omega_k\sqrt{1-h_k^2} = (1/\Delta)\tan^{-1}(X_{\mathrm{Im}}/X_{\mathrm{Re}}) \qquad (7)$$

3.数値シミュレーション

(1)　対象橋梁モデル

対象橋梁モデルはランガー橋とし，構造モデルを図－1 に示す．このモデルの諸元を表－1 に，1～8 次までの固有振動数を表－2 に示す．また，固有値解析により算出した 1～8 次までの振動モードを図－2 に示す．

(2)　常時微動シミュレーション

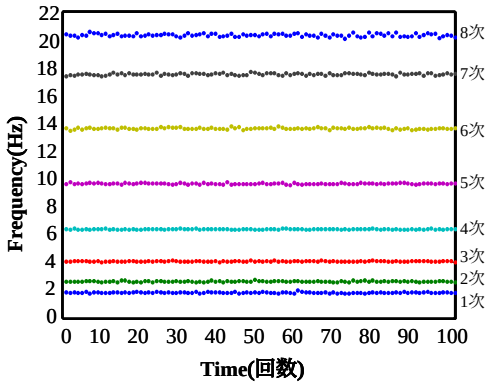
本研究では，節点番号②～⑨の鉛直方向に独立な白色雑音を与えた場合の速度応答を常時微動とした．着目点は，図－1 の節点番号②～⑨の多点観測とし，数値解析法にはモード解析法を用いた．また，各振動次数のモード減衰は 0.02 とした．

4.同定結果

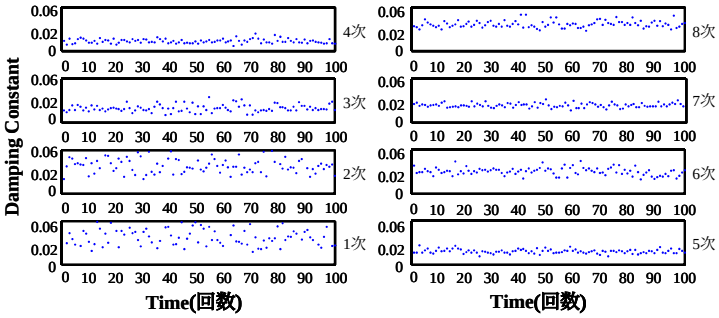
推定手法に基づき，30 秒間の常時微動データを 1 回区分として合計 100 回発生させて，振動特性推定を行った．推定手法による合計 100 回の振動数推定軌跡，減衰定数推定軌跡をそれぞれ図－3，図－4 に示す．これらの結果より，全次数における合計 100 回の振動数，減衰定数の推定が確認できた．

図－5 に，合計 100 回の推定振動モードの平均値を示す．固有値解析で算出した振動モードと比較してみると，全次数において観測点の振動モードが算出できていることが確認できた．

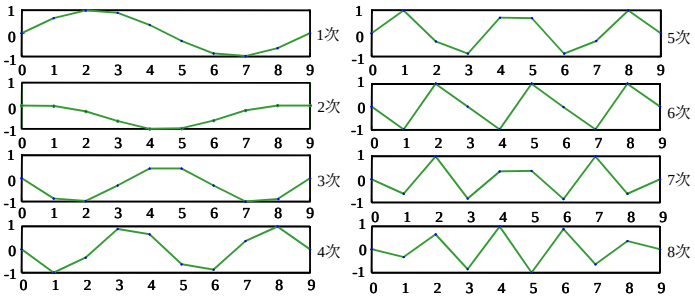
次に，推定手法における振動特性推定結果を表－3 に示す．振動数に着目してみると，全次数における推定振動数の平均値は，固有値解析に近い値が得られており，変動係数は約 1%程度と精度良く推定できている．減衰定数に着目してみると，1 次において平均値，標準偏差，変動係数は他の次数よりも高い値となっている．また，低次と高次において，平均値は設定値である 0.02 よりも高い値を推定している．



図－3　振動数推定軌跡



図－4　減衰定数推定軌跡



図－5　推定振動モード

表－3　振動特性推定精度

ランガー橋	解析値 (Hz)	振動数(Hz)			減衰定数		
		平均値(Hz)	標準偏差(Hz)	変動係数(%)	平均値	標準偏差	変動係数(%)
1次	1.742	1.740	0.03874	1.225	0.04116	0.02998	36.41
2次	2.558	2.642	0.03415	1.293	0.03985	0.01144	28.70
3次	4.018	4.085	0.02526	0.6184	0.01918	0.004955	25.83
4次	6.355	6.385	0.02593	0.4062	0.01326	0.002977	22.44
5次	9.734	9.657	0.04109	0.4255	0.01781	0.002897	16.27
6次	13.62	13.61	0.06147	0.4516	0.03023	0.005196	17.19
7次	17.61	17.50	0.06785	0.3877	0.02320	0.002988	12.88
8次	20.76	20.31	0.1007	0.4958	0.03656	0.004659	12.74

5.まとめ

本研究で得られた結果を要約すると，次のようになる．

(1)　多次元 ARMA モデルを用いて振動特性(振動数, 減衰定数, 振動モード)の自動推定を実現することができた．

(2)　100 回の振動特性推定が確認より，高い精度の推定が可能である事が確認できた．

今後は，本手法を常時微動実測に適用し，実用化を検証したい．

[参考文献]1)中宮，岡林，奥松：AR モデルによる土木構造物の高精度振動特性推定法，土木学会第 57 回年学会，第Ⅰ部門，pp.1667～1668，2002．9　2) Jer-Nan Juang：Applied System Identification，Prentice Hall，1993．11