# CIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れの並列計算

# 1. はじめに

海岸,河川における流れ現象の定量的な把握は,水害によ る被害や水辺環境の変化の予測を行う上で重要である.こ れらの予測数値シミュレーションは,大規模計算であり,ま た解析対象領域は複雑な境界形状を有することが多い.こ のため,非構造格子でも解析可能な,高精度かつ高速な数値 解析手法の構築は重要である.そこで著者らは,計算が高 速である格子ボルツマン法<sup>1),2)</sup>に対し,非構造格子への拡 張を図った CIVA-格子ボルツマン法<sup>3)</sup>の提案を行った.し かし,より大規模な問題への適用に対しては,並列計算の 導入は不可欠となる.

そこで本論文は、CIVA-格子ボルツマン法による非構造 格子に基づく浅水長波流れ解析のための並列計算手法を提 案するものである.本手法を段波問題に適用し,解析精度 及び並列化効率の観点から本手法の有効性を検討した.

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法において, 衝突演算項に格子 BGK モ デル<sup>1)</sup>を用いた浅水長波方程式に対する格子ボルツマン方 程式は以下のようになる.

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \Big[ f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \Big] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \qquad (1)$$

上式において, 左辺は粒子の並進過程, 右辺の1項目は衝 突過程,2項目は外力項をそれぞれ示している. $f_{\alpha}$ は $\alpha$ 方 向の粒子がどれくらい存在するかということを表す粒子分 布関数,  $\mathbf{e}_{\alpha}$  は粒子の並進速度ベクトル,  $f_{\alpha}^{eq}$  は平衡分布関 数である.また,e は  $e=rac{\Delta x}{\Delta t}$  で定義され, $\Delta t$  は微小時間 増分量, $\Delta x$ は格子サイズである.この支配方程式により 粒子の計算を局所的に行い,陽的に未知量 $f_{\alpha}$ を求める.な お,本論文では2次元9速度モデルを用いている.(図-1参 照)また, $F_i$ は力に関する項であり,以下のように河床勾 配,底面及び自由表面でのせん断応力,コリオリカを用い 表される.なお,詳細は参考文献<sup>2)</sup>を参照されたい.

$$F_i = -gh\frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i \tag{2}$$

また式(1)において, τは単一時間緩和係数と呼ばれる定数 であり,1タイムステップの衝突で粒子が格子点上において 一定の割合 1/2 で局所的な平衡状態に近づいていくことを示 している. $\tau$ は,鉛直方向に積分された渦動粘性係数 $\nu_e$ と 以下のような関係にある.

$$\tau = \frac{3\nu_e}{e^2\Delta t} + \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$r = \frac{1}{e^2 \Delta t} + \frac{1}{2}$$
 (3)  
KeyWords: 格子ボルツマン法,浅水長波流れ,CIVA法,並列計算

中央大学大学院 学生員 石川 裕士 日本総合研究所 正会員 立石 絢也 中央大学 正会員 樫山 和男



図-1 2次元9速度モデル

図-2 水深定義図

#### (2) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数  $f^{eq}_{\alpha}$  とは,格子点上において流体が平 衡状態に達したときの粒子分布であり,巨視的変数である 全水深・速度を用いて以下のように求められる.

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2}u_iu_i & \alpha = 1\\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2}e_{\alpha i}u_i & \alpha = 2, \dots, 5 \\ + \frac{h}{2e^4}e_{\alpha i}e_{\alpha j}u_iu_j - \frac{h}{6e^2}u_iu_i & \alpha = 2, \dots, 5 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2}e_{\alpha i}u_i & \mu \\ + \frac{h}{8e^4}e_{\alpha i}e_{\alpha j}u_iu_j - \frac{h}{24e^2}u_iu_i & \alpha = 6, \dots, 9 \end{cases}$$

上式において, h は全水深,  $u_i$  は流速, g は重力加速度であ る.なお上式の係数は、巨視的速度においてべき級数をと り,質量保存・運動量保存・エネルギー保存を満たすように 決定されている.<sup>2)</sup>

#### (3) 流れの巨視的変数

格子ボルツマン方程式では,粒子分布関数 $f_{\alpha}$ を未知量と し計算が行われる.流体の巨視的変数である全水深・速度 は,その粒子分布関数と粒子の並進速度ベクトルを用いて 以下のように計算される.

$$h = \sum_{\alpha}^{9} f_{\alpha}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha}^{9} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} \tag{5}$$

# 3. 並列計算法

本研究では,分散メモリ型並列計算機を対象とした領域 分割法に基づく並列計算手法を導入する.計算領域を,グ ラフ理論に基づく自動領域分割システムである Metis<sup>4)</sup>を 用いて分割し,分散メモリ型並列計算機の各ノードに割り 当てる.通常の有限要素法の並列計算においては,要素の 重ね合わせを行うための相互の通信が必要になるが, CIVA 法を用いた場合の並列計算では,上流側で求めた補間値を 下流側へ通信する一方向の通信のみで計算が行える.ここ では,一例として図-1の2番目の方向について説明する. 図-3の左側の領域が上流側とすると,下流側への通信のみ となり,右側領域から左側領域への通信はない.しかし,左

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: yuji@civil.chuo-u.ac.jp

側領域から右側領域への通信節点数と右側領域から左側領 域への通信節点数が移流方向によって決まるため,データの 作成が複雑になる.格子ボルツマン法の並進過程では,移 流方向は格子ベクトルの8方向に固定されているため,計 算の前に通信データを作成することができ,タイムステッ プの間に通信データを変更する必要はない.通信ライブラ リには MPI (Message Passing Interface)を使用した.並 列計算機として,20台の PC を Gigabit Ethernet により 結合した PC クラスタ型並列計算機を用いた.



図-3 並列通信

表 - 1 並列計算詳細表

CPU	Xeon3.06GHz $\times$ 20CPU
メモリ	2GB
キャッシュ	$512 \mathrm{kB}$
ネットワーク	Gigabit Ethernet
OS	linux2.4.18-3

### 4. 数值解析例

### (1) 段波問題

図-4 に解析モデル及び初期水位を示す.この数値解析 例は,静止していたダム内の流体が突然崩壊,放流する 現象である.解析格子としては,格子数 6,596 を用い,領 域分割図(20分割)を図-5 に示す.壁面の境界条件は, slip 条件とする.なお,渦動粘性係数 $\nu_e$ は,完全流体に おける理論解との比較のため,計算の安定に必要な微小量 ( $\nu_e = 0.03 [m^2/sec]$ )を与えた.





図-5 領域分割図

解析結果として,図-6 に1秒後における水深図を示す. 図より,本手法による解析結果は厳密解と定量的に良い一 致を示した.また,図-7 に演算速度倍率を並列化効率を示 す.図より,妥当な並列化効率が得られており,本手法の有 効性が確認できる.なお,プロセッサ数が増えると並列化 効率が下がっているのは,格子が粗いために,計算負荷に比 べて通信負荷が卓越したために起こっていると考えられる.







図-7 並列化効率

# 5. おわりに

本論文では, CIVA-格子ボルツマン法による非構造格子 に基づく浅水長波流れ解析のための並列計算手法を提案した.数値解析例を通じ、以下の結論を得た.

- 本手法による計算結果は、厳密解と定量的に良い一 致を示し、本手法の有効性が確認できた。
- 本手法は、高い並列化効率を得ており、大規模計算に 有効であることが明らかとなった。

今後は,より大規模な問題に対しての並列化計算を行う 予定である.

参考文献

- 1) 稲室隆二:格子ボルツマン法,物性研究,77-2,197-232,2001.
- J.G.Zhou:Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows, Springer, 2003.
- 石川裕士,立石絢也,樫山和男:非構造格子に基づく CIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析,第19回数値流体 力学シンポジウム講演論文集(CD-ROM),2005.
- 4) http://www.users.cs.umn.edu/~karypis/metis/