

境界要素法を用いたトポロジー最適化手法

新潟大学自然科学研究科 学生員 風間俊輔
新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部和久

1. はじめに

本研究の目的は、トポロジー変化を伴う構造物の形状最適化手法を、境界要素法を用いて構成することである。境界要素法は、解析領域の境界のみを離散化する境界型解法である。この手法を用いた形状最適化過程は、境界形状の更新だけで実行でき、形状変化に伴うメッシュ更新が容易になるという大きな利点を持っている。そのため、この手法に関する研究がこれまで盛んに行われてきた。しかしながら、境界の幾何形状変化を追跡して行く手法であるため、トポロジー変化を伴う形状最適化法が容易に構築できない。そこで本研究では level set 法¹⁾を境界要素法に併用することで、トポロジー変化を伴う構造物の形状最適化手法の構成を試み、解析例を通しその有効性について検証する。

2. 設計感度解析

次式で与えられる目的関数 J を考える。

$$J = F(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{X}_B) + \lambda^T \{ \mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{P} \} + \lambda_+(V - V_{max}) \quad (1)$$

ここで、 F はあるコスト関数、 λ は Lagrange 乗数ベクトル、 $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ は境界要素方程式の係数行列、 $\mathbf{U}, \mathbf{P}$ は変位と表面力の節点値ベクトル、 $\lambda_+(\geq 0)$ は Lagrange 乗数、 V は物体の体積、 V_{max} は V の上限値である。また、 $\mathbf{X}_B$ は境界要素端点座標より成るベクトルである。なお、本研究では 2 次元静弾性問題を対象とする。形状変化 $\Delta \mathbf{X}_B$ に関する変分 ΔJ は次式で与えられる。

$$\Delta J = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_B} \Delta \mathbf{X}_B + \lambda^T \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}_B} \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}_B} \mathbf{P} \right] \mathbf{X}_B + \lambda_+ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_B} \Delta \mathbf{X}_B \quad (2)$$

ここで、 $\partial F / \partial \mathbf{X}_B$ は Fréchet 微分である。また λ は次の随伴方程式の解として与える。

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{Z}_U + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}} \mathbf{Z}_P + \lambda^T \{ \mathbf{H}\mathbf{Z}_U - \mathbf{G}\mathbf{Z}_P \} = 0 \quad \text{for } \forall \mathbf{Z}_U, \mathbf{Z}_P \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{Z}_U, \mathbf{Z}_P$ はそれぞれ、Dirichlet, Neumann 境界上で $\mathbf{Z}_U = 0, \mathbf{Z}_P = 0$ を満たす任意のベクトルである。本研究で

は、形状変化 $\Delta \mathbf{X}_B$ は境界法線方向に与えるものとし、式(2)に基づき、 $\Delta J \leq 0$ を保証するように設定する。

3. Level set 法による境界トポロジーの捕捉

構造物を包含する設計領域において level set 関数を定義する。物体境界は level set 関数のゼロ等高線により与える。なお、level set 関数は符号付距離関数であり、ここでは物体領域側を正、外部領域側を負とする。解析では、当該関数値を一樣格子点に割り当て、その線形補間によりゼロ等高線を引くこととする。得られた等高線群より、物体外部境界と各空洞境界を検出し、これら閉じた部分境界毎に、一樣に節点を配置して境界要素を展開する。また、形状変化は level set 関数の移流により与える。最適形状を導出する移流速度場は、2 で述べた境界要素の移動速度の二次元場への拡張により生成する。

4. 解析例

(1) コンプライアンス最小化問題

具体的な最適化問題として、コンプライアンス最小化（剛性最大化）問題を考える。このとき、目的関数 F は次式で与えられる。

$$F = \int_{\Gamma_P} \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{U} d\Gamma \quad (4)$$

ここで、 $\bar{\Gamma}_P$ は非ゼロ表面力 $\bar{\mathbf{P}}$ の規定された部分境界である。最適化過程で $\bar{\Gamma}_P$ を固定するものとすれば、 F の Fréchet 微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_B} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} = \int_{\Gamma_P} \bar{\mathbf{P}} \cdot \Phi d\Gamma, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}} = 0 \quad (5)$$

ここで、 Φ は変位補間関数を成分とするベクトルである。なお、以下の解析では、平面ひずみ場を対象とし、ポアソン比は 0.3 とした。

(2) 正方形の片持ち梁（解析例 1）

図 1 のように左端を固定し、右端中央に下向きの荷重をかけた正方形領域の片持ち梁を考える。設計領域を 40.0×40.0 とし、格子の分割数は 40×40 分割、体積制約を初期形状の面積の 40 % と設定した。また、初期形状として領域内部に穴を 9 個開けたものを与え、level set 関数のスムージングを 100step 毎に行った。形状変化の様子を図 2 に示す。150step 前後で最終的なトポロジーが確定し、その後固

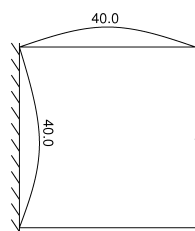


図 1 解析条件 (解析例 1)

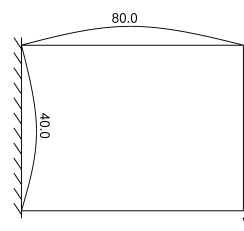


図 4 解析条件 (解析例 2)

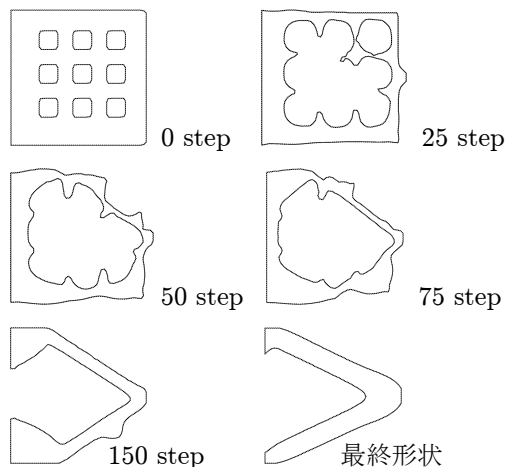


図 2 最適化過程における形状変化 (解析例 1)

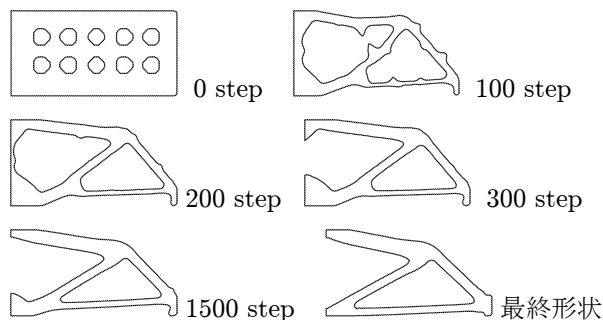


図 5 最適化過程における形状変化 (解析例 2)

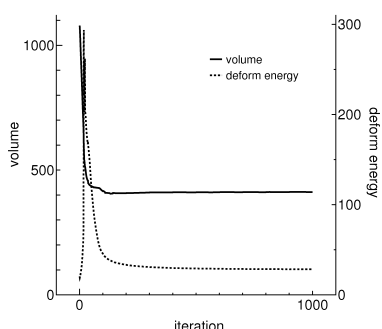


図 3 領域面積とコンプライアンスの変化 (解析例 1)

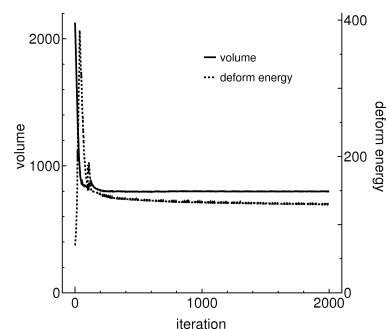


図 6 領域面積とコンプライアンスの変化 (解析例 2)

定部近傍の形状収束に多くのステップを要している。図 3 に、目的関数 F と体積 V の変化の様子を示す。極めて初期の段階でそれらは概ね収束しており、数百ステップでの形状でも実用性の面で問題ないことが分かる。

(3) 長方形の片持ち梁 (解析例 2)

図 4 のように左端を固定し、右端下方に下向きの荷重をかけた長方形領域の片持ち梁を考える。設計領域を 80.0×40.0 とし、格子の分割数は 80×40 分割、体積制約を初期形状の面積の 40 % と設定した。また、初期形状として領域内部に穴を 10 個開けたものを与え、level set 関数のスムージングを 100step 毎に行った。計算結果を図 5,6 に示す。図

6 より、領域面積は設定通りほぼ 40 % となっていることがわかる。また、300step 経過後の段階で、既に最終的なトポロジーが得られており、実用性の面では比較的初期の段階で所定の性能を有する形状が得られていることがわかる。

5. おわりに

境界要素感度解析に level set 法を併用することにより、トポロジー変化を伴う形状最適化手法を構築した。本手法では、境界要素端点座標が設計変数となるため、その数が多く形状の収束が幾分緩慢ではあるが、設計形状に何ら制約がなく、いかなるトポロジーも実現可能である。

参考文献

- 1) Wang, M.Y., Wang, X. and Guo, D.: A level set method for structural topology optimization, *Compt. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 192 (2003) 227-246.