B-spline Ritz 法を用いた液体に接する中空円筒体の 3 次元自由振動解析

北海道大学大学院工学研究科・日本学術振興会特別研究員 DC　学生員　○名木野　晴暢
北海道大学大学院工学研究科　北方圏環境政策工学専攻　フェロー　三上　隆
大同工業大学　都市環境デザイン学科　正員　水澤　富作

1．まえがき

液体に接する円柱構造物は，石油タンク，橋梁の橋脚や氷海および海洋構造物などに用いられる．近年，構造技術の発展にともないこれらの構造物は，大型化の傾向にあるため，面外せん断変形，回転慣性や半径方向の応力-ひずみ成分の影響を無視することができなくなる．また，これらの各種構造物は，地震や波浪など複雑な動的荷重を受けるため，構造物が運動することによって生じる慣性抵抗(付加質量)の増加が固有振動数を低下させる要因になる．したがって，構造物の運動による付加質量と動水圧の影響の把握が，設計上重要になってくる．

このような構造物-流体系の相関問題に関する既往の研究は古くからなされているが，構造物を 3 次元弾性体として取り扱った報告例は，著者らが知る限りではなされていないように思われる．

本論文では，液体に接する中空円筒体の 3 次元自由振動解析を行なうために，B-spline Ritz 法により固有方程式の定式化を行なった．本手法の解の収束性および精度比較について検討を行い，本手法の構造-流体相関問題への適用性について検討することを目的としている．

2．液体の支配方程式と境界条件

図-1 には，解析モデル，円筒座標系および中空円筒体の変位方向が示してある．円筒体は下端（$x=0$）で完全固定，上端（$x=L$）で自由とし，液体は円筒体の外径で接する，いわゆる外部問題を取り扱っている．

液体の運動は，非粘性，非圧縮性かつ非回転とすれば，式(1)で表される速度ポテンシャルΦ (r, θ, x, t)を仮定でき，支配方程式は式(2)で表される円筒座標系の Laplace の方程式で与えられる．

$$\Phi(r,\theta,x,t)=\phi(r,\theta,x)\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1}$$

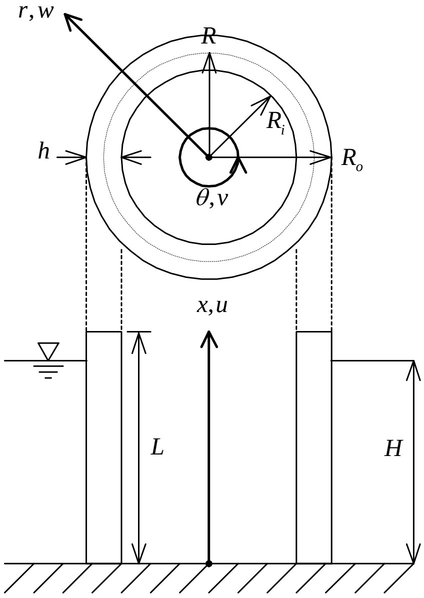

図-1　解析モデル，円筒座標系および変位方向

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0 \tag{2}$$

ここで，$\phi(r,\theta,x)$はポテンシャルである．また，式(3)は動水圧 $p(r,\theta,x,t)$であり，拡張された Bernoulli の定理で表される．

$$p=-\rho_f\,\partial\Phi/\partial t \tag{3}$$

次に，式(4)に示す境界条件および液体と円筒体の速度に関する連成条件の下で速度ポテンシャルΦ の一般解を求めれば，式(5)のようになる．

$$p\big|_{x=H}=0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \Phi\big|_{r\to\infty}\to 0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=R_o}=\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{r=R_o} \tag{4}$$

$$\Phi=\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2K_n(\lambda_j r/H)}{\lambda_j K'_n(\lambda_j R_o/H)}\cos(\lambda_j x/H)\int_0^H W(R_o,x)\cos(\lambda_j x/H)\,\mathrm{d}x\right\}\cos(n\theta) \tag{5}$$

ここで，$\lambda_j=(2j+1)\pi/2$ は余弦関数の零根であり，また，$I_n(\lambda_j r/H)$ と $K_n(\lambda_j r/H)$ はそれぞれ，第一種および第二種変形 Bessel 関数，$I'_n(\lambda_j r/H)$ と $K'_n(\lambda_j r/H)$ は r に関する一階微分である．

キーワード　中空円筒体，自由振動解析，構造-流体相関問題，B-spline Ritz 法，3 次元弾性論
連絡先　〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目　北海道大学大学院工学研究科　TEL: 011-706-6176

3．B-spline Ritz 法による固有方程式の定式化

円筒体は，微小ひずみ，線形弾性かつ調和振動する 3 次元弾性論に従うものとし，Ritz 法と式(5)の速度ポテンシャルの厳密解を用いて**図-1** に示す構造-流体相関問題の固有方程式を定式化する．この系の全ポテンシャルエネルギーΠは，次式で与えられる．

$$\Pi = U_{\max} - (T_{\max} + F_{\max}) \tag{6}$$

ここで，$U_{\max}$ および $T_{\max}$ は，それぞれ円筒弾性体の最大ひずみエネルギーおよび運動エネルギーである [1)]．また，最大外力仕事 $F^{Ex}_{\max}$ は，$\zeta = 1$ に作用する動水圧がなす仕事であり，次式で表される．

$$F^{Ex}_{\max} = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho_f R_o \pi L^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2K_n(\lambda_j R_o / H)}{\lambda_j K'_n(\lambda_j R_o / H)} \left\{ \int_0^{H/L} W(1,\xi)\cos(\lambda_i L\xi / H)\,\mathrm{d}\xi \right\}^2 \tag{7}$$

したがって，式(6)を各未定係数で極値化すれば，固有方程式が誘導できる．ここで，式(7)の被積分関数は，$k-1$ 次以下の区分的多項式で表される半径方向の振幅変位関数 W と余弦関数の積の形となっている．余弦関数を Taylor 展開し，多項式で表す場合には，展開項数の打切り問題や階乗計算による数値誤差の問題が生じる．そこで，本手法では仮想の区分点を配置し，区分的な Legendre-Gauss の数値積分を適用している．

3．数値計算例および考察

ここでは，液体に接する中空円筒体の 3 次元自由振動解析への本手法の適用性について検討するために，本手法の解の収束性および精度比較について示す．なお，数値計算に用いた物性値を**表-1** に示してある．**表-2** には，中空円筒体の振動一次モードの固有振動数 f [Hz]の収束性に与える区分点の数 $m_{x\text{-}F}$ の影響と精度比較が示してある．ここで，3 次元弾性論に基づく比較解が見当たらないので，三上・芳村 [2)]の修正シェル理論に基づく選点要素法による数値解と比較を行なう．計算に用いた幾何形状は，R_o = 40.2 m, R_i = 39.8 m, L = 80 m, H = 64 m である．この問題では，液高比 H / L = 0.8 となる液体との非接触部分を含む．本手法では，試行関数に採用している B-spline 関数を構築する区分点を利用し，解析領域を液体と接触領域と非接触領域に分割する．ここでは，非接触領域に配置する区分点の数 $m_{x\text{-}S}$ を 6 点，半径方向の区分点の数 m_r を 7 点に固定し，接触領域の区分点の数 $m_{x\text{-}F}$ を 7 から 35 まで変化させている．また，$k-1=4$ を採用し，式(7)には j に関する無限和が必要になるが，j = 71 に取れば有効数字 8 桁程度までマトリックス要素の値が収束することを確認しているので，これを用いる．これより，本手法は液体との接触領域の区分点数を増大させることで，固有振動数 f [Hz]の一様な収束状態が得られており，その収束値は，修正シェル理論に基づく数値解よりもやや大きめの値でよく一致している．したがって，本手法の妥当性が確認できる．

表-1　数値計算に用いた物性値

Young’s modulus E	206　Gpa
Poisson’s ratio ν	0.3　[-]
Density of cylinder ρ_s	7.84×10^3　kg / m^3
Density of fluid ρ_f	1.00×10^3　kg / m^3

表-2　円筒体の固有振動数 f [Hz]収束性と精度比較

$m_{x\text{-}f}$	1st			
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
7	6.736	3.843	2.100	1.310
11	6.665	3.695	1.988	1.236
15	6.652	3.647	1.948	1.209
19	6.648	3.625	1.929	1.195
23	6.647	3.613	1.919	1.187
27	6.646	3.605	1.912	1.182
31	6.645	3.600	1.907	1.179
35	6.645	3.596	1.904	1.176
Collocation[2)]	6.634	3.595	1.902	1.173

5．まとめ

本論文では，液体に接する中空円筒体の 3 次元自由振動解析への B-spline Ritz 法の適用性について検討を行なった．本手法により求めた固有振動数は，一定値に向かう収束状態を示しており，得られた収束値は，修正シェル理論に基づく数値解とよく一致している．しかしながら，収束値を得るのに必要な区分点数が多い．この原因として，非常に薄肉のモデルを取り扱っていること，仮想バネの大きさの影響などが考えられるため，今後，詳細に検討する必要がある．本手法は，B-spline 関数の特徴から解析領域を区分化する (h 法)の性質を有する Ritz 法 (p 法) であり，液体との非接触領域を含む問題にも容易に適用できる．

参考文献

1) 名木野晴暢，三上隆，水澤富作：構造工学論文集，Vol.52A，pp.89-100，2006.

2) 三上隆, 芳村仁：構造工学論文集, Vol.34A, pp.785-796, 1988.