修正剛性法を用いたハニカム構造の分岐解析

東北大学 学正会員 須藤健太郎
東北大学 正会員 池田清宏
東北大学 正会員 斉木 功

1. はじめに

正六角形ハニカムのような周期対称性を有する構造系の分岐解析を行う際，その対称性に起因する多重分岐が生じやすい[1)]．多重分岐点では，接線剛性行列のゼロ固有値に対応する独立な固有ベクトルの線形結合もまた固有ベクトルとなるために，分岐経路の方向が確定しないという問題が生じてしまう．

これまでは，群論的分岐理論[2)]に基づいて多重分岐の分岐解の対称性を決定する試みがされてきた．群論的分岐理論は数学的には完成されているが，工学の実問題への適用に関しては課題が残されていた．

そのような問題の解決策として修正剛性法が提案されている[3)]．修正剛性法とは，座標変換により接線剛性行列の対称性を見かけ上壊すことで，多重分岐点の重複度を低下させる方法である．

本研究では修正剛性法の座標変換において，転置行列の代わりに逆行列を用いるという改良を加えた．ハニカム構造の分岐解析に本手法を用いた結果，多重分岐点における固有ベクトルの中から対称パターンを持つ固有ベクトルを抽出でき，さらにその方向に分岐経路が存在していることが確認できた．

2. 修正剛性法

支配方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, f) = \mathbf{0} \qquad (1)$$

を考える．ここに $\mathbf{u}$ は変位ベクトルであり，f は荷重パラメータである．従来の修正剛性法[3)]では，分岐解析において使用する接線剛性行列 $\mathbf{J} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{u}$ に代わって

- 行列 $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{H}^T\mathbf{J}\mathbf{H}$

の固有ペアを用いることが提案されていた．しかし，座標変換行列 $\mathbf{H}$ が直交行列でない場合には，求めた固有ベクトルに誤差が発生することが問題であった．

そこで，本研究では

- 行列 $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{H}$

で定義される剛性行列を用いる方法を提案する．座標変換行列 $\boldsymbol{H}$ を定義するに際し，2×2 の行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+\zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (2)$$

を用いて，ある節点の座標 (x_i, y_i) を

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \mathbf{AR}\begin{pmatrix} \tilde{x_i} \\ \tilde{y_i} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

と変数変換すると，その節点の座標系は θ の方向に $1+\zeta$ 倍されることになる．ここに (x_i, y_i) は変換前の座標系で，$(\tilde{x_i}, \tilde{y_i})$ は変換後の座標系である．この操作により，系が持つ対称性を破壊・保持することが本研究の重要な着眼点である．

節点に関する座標変換 $\mathbf{AR}$ を重ね合わせることにより，座標変換行列 $\mathbf{H}$ を定義する．このとき変位ベクトル $\mathbf{u}$ と支配方程式 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{F}} \qquad (4)$$

と変換され，接線剛性行列 $\mathbf{J}$ は

$$\tilde{\mathbf{J}} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}}{\partial\tilde{\mathbf{u}}} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}}{\partial\mathbf{u}}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{H} \qquad (5)$$

と修正される．また，元の接線剛性行列 $\mathbf{J}$ と修正された接線剛性行列 $\tilde{\mathbf{J}}$ の固有ベクトルの定義式を考えると，

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\eta} = \lambda\boldsymbol{\eta} \qquad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \lambda\tilde{\boldsymbol{\eta}} \qquad (7)$$

となる．ここに，λ は固有値で，$\boldsymbol{\eta}$ は $\mathbf{J}$ の固有ベクトル，$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ は $\tilde{\mathbf{J}}$ の固有ベクトルである．式 (7) に式 (5) を代入し両辺の左側から $\mathbf{H}$ を乗じると

$$\mathbf{J}\mathbf{H}\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \lambda\mathbf{H}\tilde{\boldsymbol{\eta}} \qquad (8)$$

〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06
Keywords: 修正剛性法，ハニカム構造，六重分岐点

となる．式 (6) と式 (8) を比較すると

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}\tilde{\boldsymbol{\eta}} \qquad (9)$$

が元の方程式 (1) の固有ベクトルとなることが分かる．

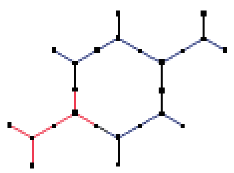
3. 適用例

図–1 に示す 2×2 のセルを周期単位とする 96 節点，96 要素の正六角形弾性ハニカム構造に，等二軸圧縮負荷による面内座屈解析を行い，その結果として求めた六重分岐点における接線剛性行列に対して修正剛性法を適用し，分岐モードを特定した．

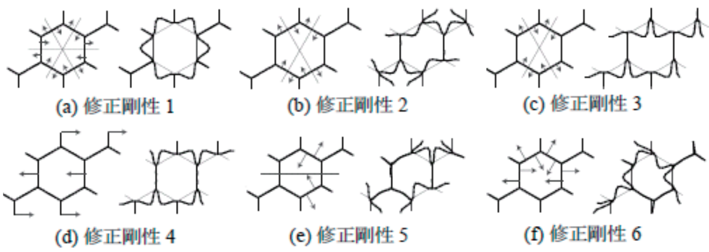
それぞれの分岐モードは**図–2** (a)〜(f) に示すように

- 修正剛性 1：$\pi/6$ 回転に対して不変
- 修正剛性 2：π 回転に対して不変
- 修正剛性 3：π 回転に対して不変
- 修正剛性 4：P_1 軸のみの並進に対して不変
- 修正剛性 5：非対称
- 修正剛性 6：非対称

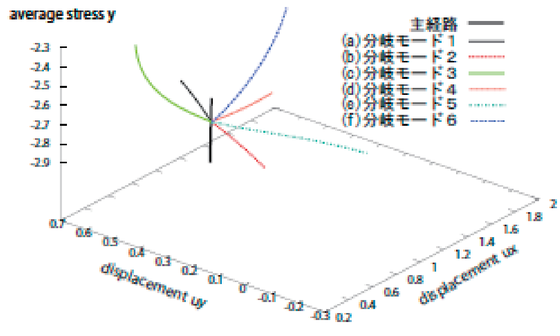
という剛性修正を行うことによって求めることができた．さらに，それぞれの方向に平衡点を探索すると，**図–3** に示すように全ての分岐モードの方向に釣合経路が存在し，それらの経路上の変形は**図–4** (a)〜(f) のように，**図–2** (a)〜(f) に示すそれぞれの分岐モードと一致した．



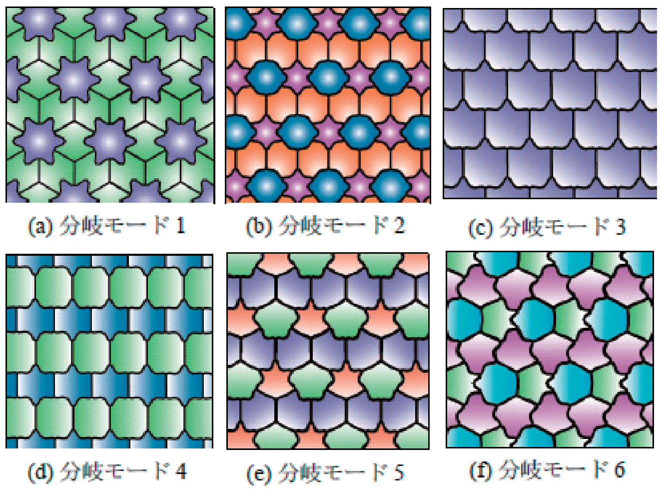
図–1 2 × 2 セルの解析モデル



図–2 剛性修正の方向と分岐モード (左側に修正の方向を示し，右側には修正に伴う変形パターンを示す)



図–3 六重分岐点の荷重変位曲線



図–4 分岐経路上の変形

4. 結論

今回の研究では，六重分岐点の面白い変形パターンを求めることに成功した．今後の課題として，多重度のさらに大きい分岐点の分岐モードの特定等が挙げられる．

参考文献

1) Saiki, I., Ikeda, K., and Murota, K., Flower patterns appearing on a honeycomb structure and their bifurcation mechanism. *Int. J. Bif. Chaos*, 15(2), pp. 497–515, 2005.
2) Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H. Bifurcation hierarchy of symmetric structures, *Int. J. Solids Structures*, 27(12), pp. 1551–1573, 1991.
3) Ikeda, K., Fujii, F., Ario, I., Stiffness modification method for bifurcation analysis of symmetric structures, 投稿中.
4) 成島 雄嗣：ハニカムの変形パターンの分岐シミュレーション, 東北大学卒業論文 , 2004.