

2 辺固定板の解析解と級数項数

日本港湾コンサルタント 技術本部技術開発部 正会員 滑川伸孝
 東北地方整備局 仙台港湾空港技術調査事務所 坂本 明
 沿岸技術研究センター 調査部 正会員 成瀬英治
 日本港湾コンサルタント 技術本部技術開発部 大工原洋充
 日本港湾コンサルタント 技術本部技術開発部 舟田邦雄

1.はじめに

いままでに級数解法により数多くの境界条件について板の解析解が求められているが、設計に供する精度まで収束するのに必要な級数項数が示されていない。

本論文は、2 辺固定 2 辺単純支持板（以後 2 辺固定板と略す）をリッツの方法で新たに解き、級数項数によりたわみ、曲げモーメントがどのように収束していくかを示して、設計に資することを目的としたものである。

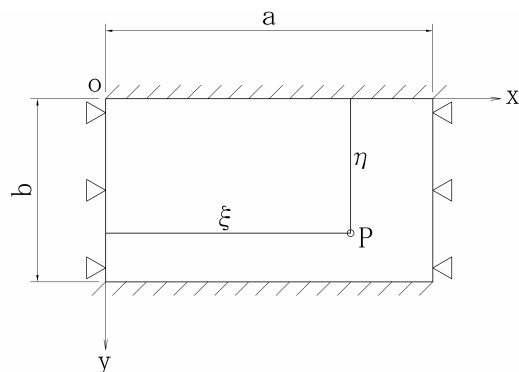


図-1 集中荷重が作用する2辺固定板の座標系

2. 2 辺固定板の解析解

図-1 に示す境界条件から、2 辺固定板に集中荷重 P が作用するたわみ関数 $\omega(x, y)$ を式(1)で仮定する。

$$\omega = \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\sin \frac{m\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \cdots \cdots \cdots (1)$$

式(1)のたわみ関数を2階微分して曲げモーメント M_x の算定式(2)、 M_y の算定式(3)を得る。

$$M_x = D\pi^2 \sum_m \sum_n a_{mn} \left\{ - \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{2n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} + \left(\frac{m}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \right\} \cdots \cdots (2)$$

$$M_y = D\pi^2 \sum_m \sum_n a_{mn} \left\{ - \left[\nu \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} + \nu \left(\frac{m}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \right\} \cdots \cdots (3)$$

2 辺固定板の曲げひずみエネルギー U は、式(1)のたわみ関数 ω から式(4)で示される。

$$U = a^2 \pi^4 D ab \left\{ \frac{3}{8} \left(\frac{m}{2a} \right)^4 + \frac{1}{8} \left(\frac{2n}{b} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 \right\} \cdots \cdots (4)$$

ここで $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, ν ポアソン比, h 板厚, E ヤング係数

集中荷重 P のポテンシャルエネルギー π_e を $x=\xi$, $y=\eta$ のたわみ $\omega(\xi, \eta)$ との積で式(5)のように表す。

$$\pi_e = -P\omega(\xi, \eta) = -P \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\sin \frac{m\pi \xi}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi \eta}{b} \right) \cdots \cdots (5)$$

式(5) π_e に式(2)の板のひずみエネルギー U を加えた全ポテンシャルエネルギー π に、ポテンシャルエネルギー最小の原理を適用して式(6)を得る。式(6)から式(7)の係数 a_{mn} を得ることができる。

キーワード 2 辺固定板, 集中荷重, 分布荷重モデル, 級数項数, 収束, 曲げモーメント

連絡先 〒141-0031 品川区西五反田 8-3-6 ㈱日本港湾コンサルタント 技術開発部 TEL:03-5434-5307 FAX:03-5434-5393

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_{mn}} = \frac{\partial (U + \pi_e)}{\partial a_{mn}} = 0 \quad \dots (6)$$

$$a_{mn} = \frac{P \left(\sin \frac{m\pi \xi}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi \eta}{b} \right)}{2D\pi^4 ab \left\{ \frac{3}{8} \left(\frac{m}{2a} \right)^4 + \frac{1}{8} \left(\frac{2n}{b} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 \right\}} \quad \dots (7)$$

3. たわみ・曲げモーメントの解と級数項数

(1) 2 辺固定板の計算条件

板の固定長さ $a=2.0\text{m}$, 支持板幅 $b=2.0\text{m}$, 板厚 $h=0.2\text{m}$, ヤング係数 $E=25 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, ポアソン比 $\nu=0.2$, 集中荷重 $P=100\text{kN}$, 荷重位置 $\xi=1.0\text{m}$, $\eta=1.0\text{m}$, 計算位置 $x=1.0\text{m}$, $y=1.0\text{m}$; $x=1.0\text{m}$, $y=1.5\text{m}$

(2) たわみと曲げモーメントの計算結果

図-2 にたわみと級数項数の関係を, 図-3 に曲げモーメントと級数項数の関係を示す. たわみは 10~20 次でほぼ収束する. 曲げモーメントは荷重位置から離れた位置(1.5, 1.0)では 100 次のオーダーで収束するが, 荷重位置(1.0, 1.0)では収束しないで発散する.

(3) 分布荷重による荷重位置曲げモーメントの収束解

解析解における集中荷重の作用面積はゼロを仮定するが, 実現象においてはゼロではない. 集中荷重を微小面積に作用する分布荷重と考え, ここでは集中荷重位置(ξ, η)を $\xi = \xi \pm a/200$, $\eta = \eta \pm b/200$ の 4 点に分散させた集中荷重 $P/4$ の解を重ね合わせて算出し, 図-2, 3 に黒塗りのマークで示す. このようにして得られた荷重作用位置の曲げモーメントは収束する. 1 点集中荷重で収束するケースのたわみと曲げモーメントの値と微小面積の分布荷重モデルによる値とはほぼ一致しており, 同手法の妥当性を示している.

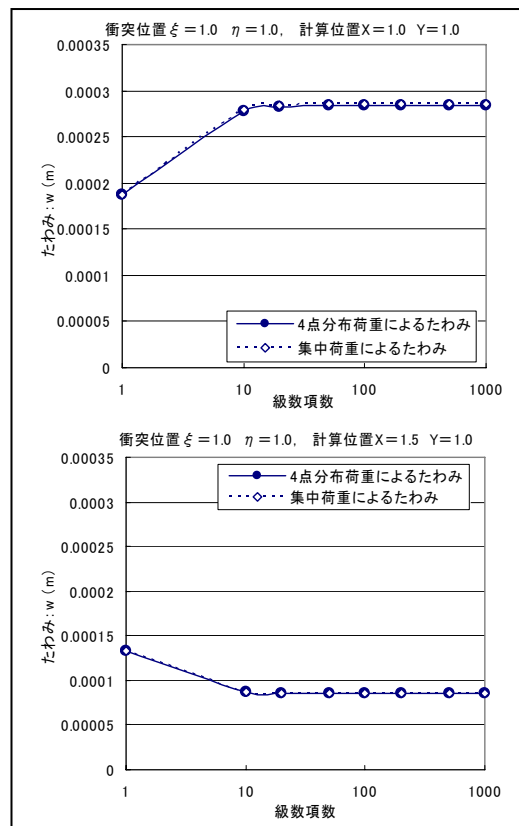


図-2 2 辺固定板のたわみの解と級数項数

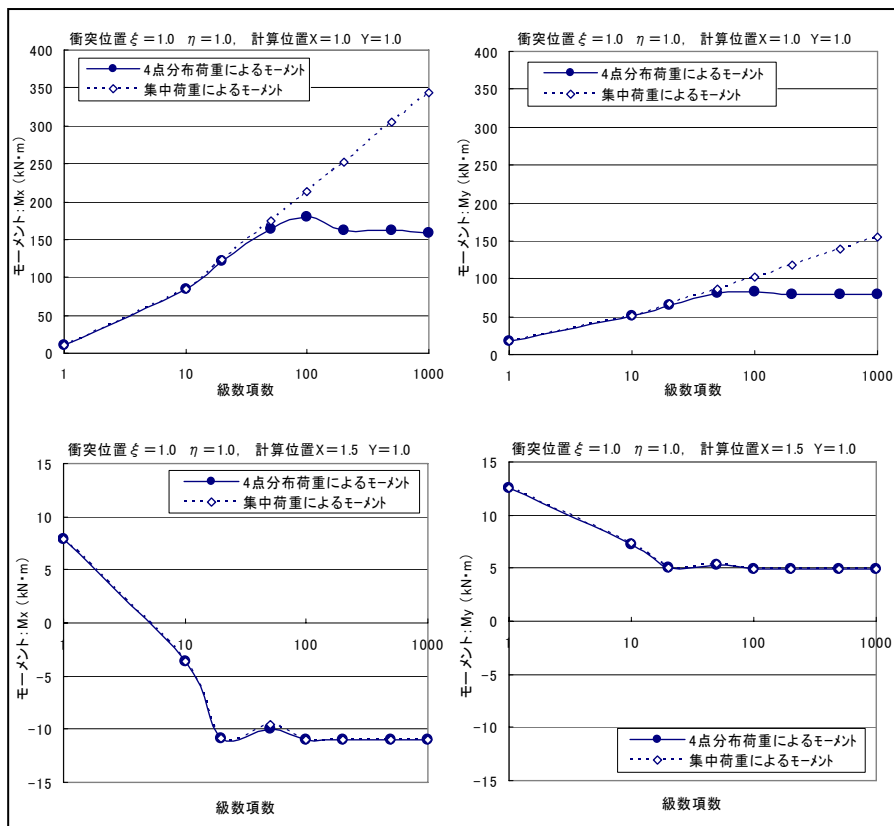


図-3 2 辺固定板の曲げモーメントの解と級数項数

<参考文献>

- 1) 青木徹彦 (1998): 構造力学, コロナ社, pp285-299.
- 2) (社) 土木学会 (1986): 構造力学公式集, pp323-346.