

骨組解析における従属自由度の効用

阪神高速道路㈱ 正会員 袴田 文雄

1. はじめに

橋梁や建築物など構造に関する実用的な非線形解析において骨組解析を用いることが多い。梁柱モデルを用いて解析する機会が多い。このとき従属自由度を活用することでさまざまな問題を効率よく解くことができると考えられる。ところが、改めて従属自由度を論じたものは少ないのが現状である。「従属自由度」とはここでは「自由度を持っているが、他の自由度に従属するので、独立ではない自由度」と定義する。以下では従属自由度についての適用事例を述べる。

2. 従属自由度

従属自由度の事例として、図-1 に示した節点①と②を結ぶ要素があり水平に移動が可能である事例を取りあげる。節点①②とも拘束されていないので自由度 1, 2 を持っている。ところが要素が剛体のとき、自由度 1 は自由度 2 に拘束される。このとき節点①の自由度 1 は節点②の自由度 2 の従属変数、すなわち従属自由度になる。以下では自由度 1 を slave, 自由度 2 を master と呼ぶこととする。



図-1 剛部材の両端節点自由度

3. 全体座標系の剛性行列

部材端に 3 自由度を持つ梁要素を考える。 $\mathbf{f}, \mathbf{u}$ は部材座標系の節点力と変位、 $\mathbf{F}, \mathbf{U}$ は全体座標系の節点力と変位とすると、座標変換行列 $\mathbf{A}$ およびその転置行列 $\mathbf{A}^T$ を用いて、(1) (2) で表される。ここで $\mathbf{A}$ は 3*3 の小行列からなる正方行列である。したがって、(3) (4) で全体座標系での部材の剛性行列 $\mathbf{K}$ 、断面力への変換行列 $\mathbf{T}$ が示される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A}\mathbf{U} & (1) \\ \mathbf{F} &= \mathbf{A}^T \mathbf{f} & (2) \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{k} \mathbf{A}) \mathbf{U} = \mathbf{K} \mathbf{U} & (3) \\ \mathbf{f} &= \mathbf{k} \mathbf{u} = (\mathbf{k} \mathbf{A}) \mathbf{U} = \mathbf{T} \mathbf{U} & (4) \\ \mathbf{u} &= (\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{U} & (5) \end{aligned}$$

従属自由度がある場合には、従属自由度はある係数行列 $\mathbf{B}$ によって独立な自由度で表現されるので、(1) に係数行列 $\mathbf{B}$ が加わって(5)のように扱う。すなわち、従属自由度がある場合には行列 $\mathbf{B}$ を考えることになる。

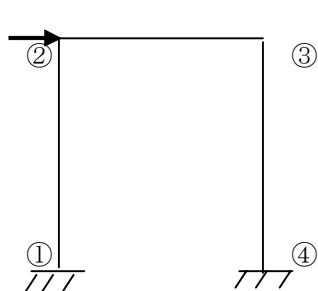


図-2 基本モデル

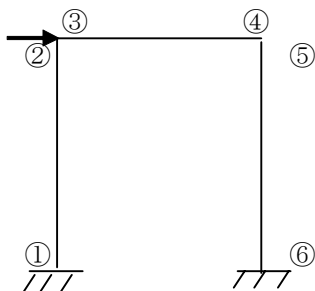


図-3 重複節点

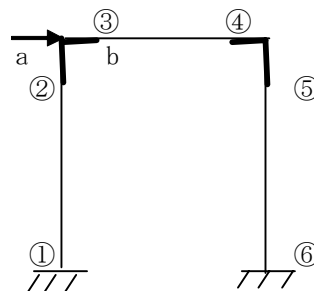


図-4 剛域問題

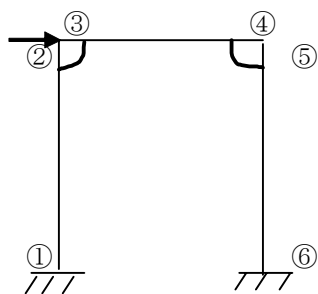


図-5 回転バネ付加

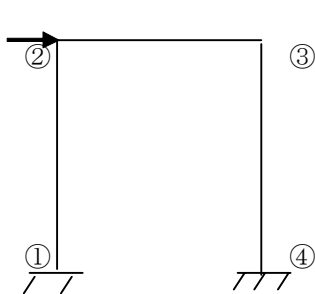


図-6 行列の縮減

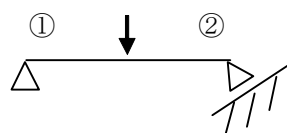


図-7 斜面支持

キーワード 骨組解析, 従属自由度, 斜面支持, 剛域, 崩壊解析

連絡先

541-0056 大阪市中央区久太郎町 4-1-3 阪神高速道路株式会社 TEL06-4963-5601

4. 構造解析における従属自由度の活用

4.1 事例① 重複節点

従属自由度の問題を以下の5つの事例で見ることにする．すなわち，1) 重複節点，2) 剛域問題，3) 回転ばね要素付加問題，4) 行列の縮減，5) 斜面支持問題の5類型である．図-2を基本問題とする．

図-3において梁柱隅角部で柱節点と梁節点を別々に取るとすると，全部で6節点問題になる．個別に作成した節点②③，節点⑤④をそれぞれ同一にすることで，基本問題と同一問題となる．このとき，左半分では節点②の3自由度 U_1, U_2, U_3 を master，節点③の3自由度 U_4, U_5, U_6 を slave とすると，従属自由度は独立な自由度により(6)のように表記できる．単位行列を加えて式(5)における **B** を構成する．

4.2 事例② 剛域問題

次に隅角部がある場合の定式化を考える．図-4のように左隅角部で，柱に a，梁に b の剛域があるとする．節点②における自由度 U_1, U_2, U_3 を master，節点③における自由度 U_4, U_5, U_6 を slave とすると，従属自由度は独立な自由度により(7)のように表記できる．単位行列を加えて式(5)における **B** を構成する．

4.3 事例③ 回転ばね要素付加問題

図-5のように隅角部に新たに回転ばね要素を加えるために，回転自由度のみを付加することを考える．図-5 左側で節点②における自由度を U_1, U_2, U_3 ，節点③における自由度を U_4, U_5, U_6 とすると，独立な自由度は U_1, U_2, U_3, U_6 ，従属自由度は U_4, U_5 である．従属自由度は，独立な自由度で(8)のように表記できる．単位行列を加えて式(5)における **B** を構成する．

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

4.4 事例④ 行列の縮減

構造解析では作用しない外力の自由度を対象にして剛性行列の縮減を行うことがある．このとき，外力の存在する自由度は master とし，縮減する自由度は slave すなわち「従属自由度」とすることができる．図-6における骨組構造では，節点②の水平方向にのみ外力が作用している．すなわち，節点②の水平方向の1自由度問題に縮減することが可能である．6自由度問題を1自由度問題として解くことも可能になる．節点②，③がそれぞれ3自由度を持ち，行列縮減後には変位 U_1 のみで表記できるから，それ以外の自由度群 U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 は U_1 の従属自由度と考えることもできる．

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$U_3 = \tan \theta \quad U_2 \quad (9)$$

4.5 事例⑤ 斜面支持問題

図-7のように梁があつて，節点②は勾配を持つ斜面上に沿って移動することを考える．斜面では U_2, U_3, U_4 の3つの自由度を持っているが，このうち， U_2, U_3 はそれぞれ独立ではなく，(9)のように表現される．ここで， θ は斜面の水平軸との勾配である．単位行列を加えて式(5)における **B** を構成する．

5 応用問題としての崩壊解析

従属自由度の応用として，崩壊解析がある．図-2のような骨組構造に荷重が作用し始めたときから，系が最大荷重を示した後，終局変位に至って反力がゼロに戻るまで荷重変位関係を求めるもの．当初は弾性応答を行うが，柱や梁の隅角部などにおいて塑性ヒンジが形成されると部材は非線形挙動をはじめめる．破壊過程を考えた push over 解析に同じである．不静定構造の場合にはひとつの部材の終局は系の終局と一致するとは限らない．この間，それぞれの部材軸力は変動する．系の終局変位を求めることで系の Capacity を定義することができる．この場合 Capacity とは変形性能であつて耐力ではない．

6 結論

骨組解析を行うとき，従属自由度を活用することで，各種の問題を解くことができる．すなわち，1) 重複節点，2) 剛域問題，3) 回転ばね要素付加問題，4) 行列の縮減，5) 斜面支持問題について従属自由度の観点からの考え方を示した．