

はり-柱理論のたわみ公式による構造座屈計算

法政大学 正会員 阿井 正博*
学生会員 渡辺 暁

1.はじめに はり-柱理論の“たわみ公式”は、微小変位の範囲で比較的大きな軸力が作用するときの正式な剛性関係であり、はり系の安定問題に数式展開されてきた。^{eg.1)} 他方で、多要素から成る構造では、その座屈方程式の展開は実際上不可能であり、一般にコンピュータ解析用に開発された“軸力幾何剛性マトリックス”²⁾で扱われる。後者は軸力効果が線形化された式展開であり、十分な数値結果のためには密な要素分割を要する。本文では、前者のたわみ公式によって構造座屈を決定する1つの単純な繰返し計算法を提案する。

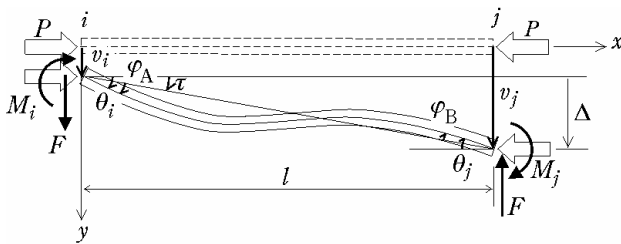


Fig.1 たわみ公式での変数

2. たわみ公式からの剛性マトリックス

軸圧縮力 P （引張力 T ）の先行状態の上での“たわみ公式”は、両端の曲げ変形 φ_A, φ_B と剛体回転角 τ に対して(Fig.1)

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{EI}{l} \{s(P)\varphi_A + s'(P)\varphi_B\} \\ M_j &= \frac{EI}{l} \{s'(P)\varphi_A + s(P)\varphi_B\} \\ F &= \frac{EI}{l^2} (s(P) + s'(P))(\varphi_A + \varphi_B) + P \frac{\Delta}{l} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } s(P) &= \frac{\beta \sin \beta - \beta^2 \cos \beta}{2 - 2 \cos \beta - \beta \sin \beta} \\ s'(P) &= \frac{\beta^2 - \beta \sin \beta}{2 - 2 \cos \beta - \beta \sin \beta}, \quad \beta = l \sqrt{\frac{P}{EI}} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{引張 } T(>0) \text{ のとき} \\ s(T) = \frac{\beta \sinh \beta - \beta^2 \cosh \beta}{-2 + 2 \cosh \beta - \beta \sinh \beta} \\ s'(T) = \frac{\beta^2 - \beta \sinh \beta}{-2 + 2 \cosh \beta - \beta \sinh \beta}, \quad \beta = l \sqrt{\frac{T}{EI}} \end{array} \right]$$

にあり、これを 要素(e)の両側節点 i, j の6自由度に対して書きなおす。先行状態からの変化分は正確には微分量として考えられる量であり、軸力変化分の曲げ剛性への効果はなく、 $\varphi_{A,B} = \theta_{i,j} - (v_j - v_i)/l$, $F_{yi} = -F_{yj} = F$ などを考慮して、引張 T 、圧縮 P を軸力 N の正、負で表わすものとして

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_i \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_j \end{Bmatrix}_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{l^3}(s+s') + \frac{N}{l} & \frac{EI}{l^2}(s+s') \\ 0 & -\frac{EI}{l^2}(s+s') & \frac{EI}{l}s \\ \text{Sym.} & & \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EI}{l^3}(s+s') - \frac{N}{l} & \frac{EI}{l^2}(s+s') \\ 0 & -\frac{EI}{l^2}(s+s') & \frac{EI}{l}s' \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{l^3}(s+s') + \frac{N}{l} & -\frac{EI}{l^2}(s+s') \\ 0 & -\frac{EI}{l^2}(s+s') & \frac{EI}{l}s' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}_{(e)} \quad (1')$$

の剛性マトリックスが得られる。

3. 構造座屈の数値計算手順

初期荷重 $\{P_{N0}\}$ からの増分荷重モード $\{P_N^*\}$ の

$$\text{線形载荷: } \{P_N\} = \{P_{N0}\} + \rho \{P_N^*\} \quad (2)$$

における骨組構造の座屈を、前述のはり-柱理論からの剛性マトリックスで決定する手順を考える。

座屈前の変形が小さい骨組座屈は、“軸力幾何剛性マトリックス”の上での“線形固有値問題”としての決定が一般的であるが、十分な精度のためには各部材が要素分割される必要がある。はり-柱理論の“たわみ公式”を用いれば、正式な座屈決定が期待される。ただし、荷重パラメータ ρ に関する線形固有値問題には展開されない。

座屈決定の際に、荷重 $\{P_{N0}\}$, $\{P_N^*\}$ に対する“初期剛性” $[K_{NL}]$ の上での線形計算による変位モードが用意されることは、これまでの方法と同じである：

$$\{u_{N0}\} = [K_{NL}]^{-1} \{P_{N0}\}, \quad \{u_N^*\} = [K_{NL}]^{-1} \{P_N^*\} \quad (3a)$$

によって载荷途中 ρ の節点変位は $\{u_N(\rho)\} = \{u_{N0}\} + \rho \{u_N^*\}$ にあり、各部材(e)の軸力 $N_{(e)}$ も

$$N_{(e)} = N_{(e)0} + \rho N_{(e)}^* \quad (3b)$$

に表される $N_{(e)0}, N_{(e)}^*$ が、両端節点 i, j の変位より決まる。式(1)'の要素剛性自体が軸力に関して非線形にあり、ここでは与えられた荷重値 ρ_I での構造剛性マトリックス $[K_N(\rho_I)]$ 自体の固有値

$$[K_N(\rho_I)]\{X\} = \kappa\{X\} \quad (4)$$

を計算しながら、座屈決定を進める。

キーワード：はり-柱理論、たわみ公式、構造座屈

* 連絡先：〒184-8584 小金井市梶野町 3-7-2

初期荷重 $\{P_{N0}\}$ において安定つり合い状態にあり、 $\{P_N^*\}$ -方向の荷重増分に対して座屈が予想されるとき、予め設定した増分間隔 $\Delta\rho$ での式(2)の荷重

$$\rho_I = \Delta\rho \times I, \quad I = 0, 1, 2, \dots$$

に対して式(4)の固有値問題を順次計算する。

荷重段階 I まですべての固有値が正値にあって、段階 $I+1$ で負値の固有値が見出されたとき、荷重 ρ_I と ρ_{I+1} の間で座屈が生じる状態にある。このとき、座屈をはさむ“安定側”の荷重値 $\rho^+ (= \rho_I)$ ，“不安定側”の $\rho^- (= \rho_{I+1})$ より、次の $\rho' = (\rho^+ + \rho^-)/2$ に対して固有値計算をして、その結果の安定、不安定によって新たに $\rho^+ = \rho'$, or $\rho^- = \rho'$ として計算を進める2分割法が考えられるが、その繰返し回数は一般に多くなる。

式(4)の N 個の固有ベクトルは互いに正規直交の関係にあり、それらの固有値、固有ベクトル自体が ρ に対するつり合い経路の上で滑らかに変化している。荷重 ρ^+ での剛性マトリックス $[K_N]^+$ の最小固有値 κ^+ に対する固有ベクトルを $\{X\}^+$ 、 ρ^- での $[K_N]^-$ の負値固有値 κ^- の固有ベクトルを $\{X\}^-$ として、座屈荷重を目指して次荷重を以下のように設定する：

I) $\{X\}^+ \cdot \{X\}^- \approx 1$ にあるときには、同一固有ベクトルが $\{X\}^+$ から $\{X\}^-$ に変化していると考えられ、 ρ^+ での固有値 κ^+ が ρ^- の固有値 κ^- に連続しているものとして、その間を直線近似した

$$\text{荷重: } \rho' = \rho^+ + \frac{\kappa^+}{\kappa^+ - \kappa^-} (\rho^- - \rho^+) \quad (5.a)$$

に対して、次の固有値計算に進む。

II) $\{X\}^+ \cdot \{X\}^- \neq 1$ であれば、2つの $\{X\}^+$ 、 $\{X\}^-$ は別系の固有ベクトルと考えられ、固有値 κ^+ と κ^- の間に連結性はないとして、前述の2分割法による

$$\text{荷重: } \rho' = \rho^+ + \frac{1}{2} (\rho^- - \rho^+) \quad (5.b)$$

に対して次回計算を行う。

初期つり合い状態での最小固有値 κ_0 に対する許容値 ε を設定して、以上の計算での絶対値最小固有値が $|\kappa_{\min}|/\kappa_0 < \varepsilon$ に達したときを座屈状態とみなす。

4. 数値計算結果

側拘束矩形ラーメン：Fig.2に示すラーメン($E=206$ GPa, $A=84.12$, $I=1740$, パネル幅、高さ=500 cm)の3点載荷での座屈荷重は、1部材→1要素の軸力幾何剛性では $P_{cr}=3413.7$ であったが、上記の計算結果では $P_{cr}=2364.9$ kNが得られた。その最小固有値 $\kappa_{\min}/\kappa_0$ と荷重パラメータ ρ の計算過程($P^*=5000$)をFig.3に示している($\varepsilon=0.001$, I)とII)の境界値0.8)。

極端な計算例：1要素の両端固定柱は、一般変位法では自由度がないために扱えないが、たわみ公式(1)自体は s, s' の分母が零値の特異状態となる。それに近い例として、長さ1500cm($EA=1.733 \times 10^6$, $EI=4.882 \times 10^8$ (kN))の柱の両側が、断面寸法2倍、長さ400cmの“はり”(上側両端：回転拘束 y -方向ローラ)に剛結された場合で計算した(Fig.4)。本文での方法では、

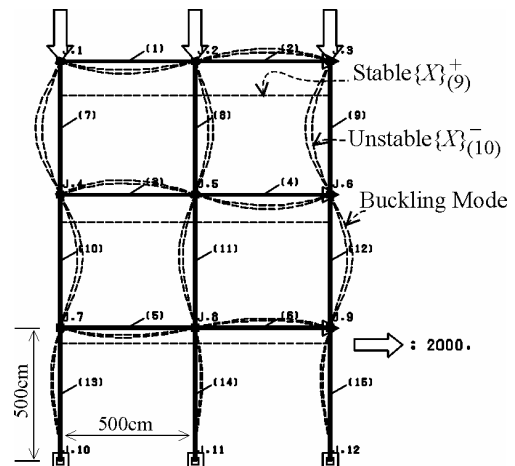


Fig.2 側拘束型ラーメン

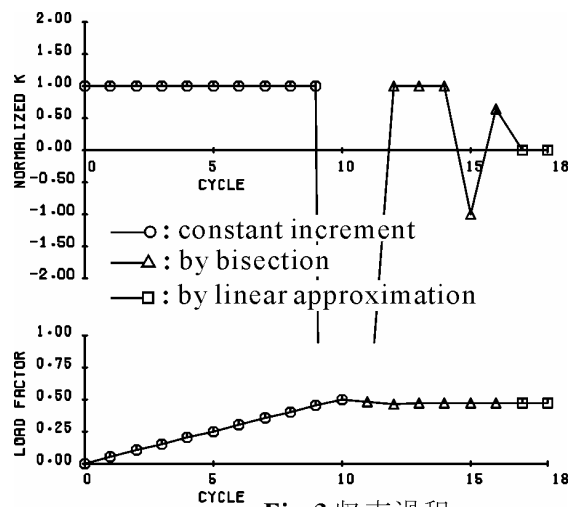


Fig.3 収束過程

$P_{cr}=8472$ kN、一般の軸力幾何剛性では $P_{cr}=3.846 \times 10^5$ (2分割では $P_{cr}=8580$)の結果が得られた。

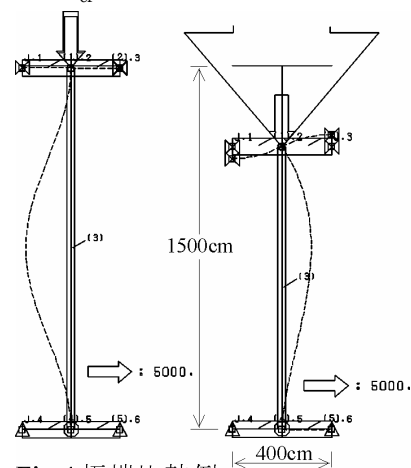


Fig.4 極端比較例

5. まとめ 軸力 N に関する非線形固有値問題を扱ったが、有限変位問題であっても滑らかな非線形にある限り、代数方程式でのNewton-Raphson法に相当して、3.のI)とII)による固有値に関する繰返し計算が成立する筈である。

〈文献〉 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.; 2) Hartz, B.J.: Matrix formulation of structural stability problems, *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol.91, No.ST6, Dec., 1965.