

比較的低次の変位場を用いた厚板解析に関する一考察

足利工業大学 正 会 員 ○ 末武 義崇

1. まえがき

横せん断変形の影響を考慮した厚板の曲げ解析については、Reissner および Mindlin 以来、多くの研究報告がなされている。古典的な Reissner- Mindlin 理論においては、板中央面の伸縮や面内応力は常にゼロとなることが仮定されているため、変位や応力の板厚方向分布に関する正確な評価は難しい。また、古典理論に従った場合、問題によっては必ずしも高精度の解が得られない。平板解析の高精度化を目的とした研究も多く報告されているが、その多くが高次の変位場を仮定したものである。こうした高次理論については、物理的な意味の不明確な合応力の導入や、解析理論の複雑さなど、解決すべき課題も残されている。

本研究は、古典理論の持つ簡明性をできる限り損なわず、なおかつ比較的高精度の解析が可能となるような平板理論の定式化を目的とする。従って、仮定する変位場は低次のものに限定し、物理的な意味の不明確な合応力も導入しないものとする。筆者は、板の横荷重に占める物体力および表面力を明確に区別して評価することで、比較的簡明な平板理論が構築できることを明らかにしてきた^{1), 2)}。本研究では、構築した理論を変位や応力の板厚方向分布の解析に適用し、その有用性を定量的に明らかにする。

2. 低次の平板理論

本研究では、面内変位 U および V に関して 3 次、たわみ W に関して一定の変位場を仮定する。すなわち、次式である。

$$\left. \begin{aligned} U &= u - \psi_x z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) z^3 \\ V &= v - \psi_y z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) z^3, \quad W = w \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 (u, v, w) は板中央面における (x, y, z) 3 方向の変位、 ψ_x および ψ_y は x および y 方向の回転角、 t は板厚である。座標系については、板中央面に $x-y$ 平面を設定し、その法線方向に z 軸を設けることとした。式(1)の変位場は、板上下面におけるせん断応力ゼロの条件をあらかじめ満足している。応力 - ひずみ関係につい

ては、三次元等方体の Hooke の法則において、板厚方向の垂直ひずみ ε_z を消去して誘導した。ここでは、例として、 σ_x に関する関係式のみ示すことにする。

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z; \quad \sigma_z = -\frac{\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2} \left(1 - \frac{3}{t} z + \frac{4}{t^3} z^3 \right) + \frac{\bar{p}_0}{2} \left(1 - \frac{2}{t} z \right) + \bar{p}_2 \quad (2)$$

ここで、 E は Young 率、 ν は Poisson 比である。式(2)は、板厚方向の垂直応力 σ_z の影響を加味した形になっている。また、垂直応力 σ_z は、図 1 の荷重構成に対応した力学的境界条件を満足するように、力の釣り合い式を積分することで決定した。式(1)・(2)を用いて平板理論の基礎式を誘導すれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\nu}{4G} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2), \quad \nabla^4 w = \frac{1}{D} \left[\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \frac{t^2}{6(1-\nu)} \nabla^2 \left\{ \frac{12-\nu}{10} \bar{p}_0 + \frac{3}{5} (2-\nu) (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \right\} \right] \\ \nabla^4 \psi_x &= \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \frac{t^2}{60(1-\nu)} \nabla^2 \{ (3+\nu) \bar{p}_0 + 3(1+2\nu) (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なお、 y 方向の面内変位と回転角に関する基礎式は省略した。

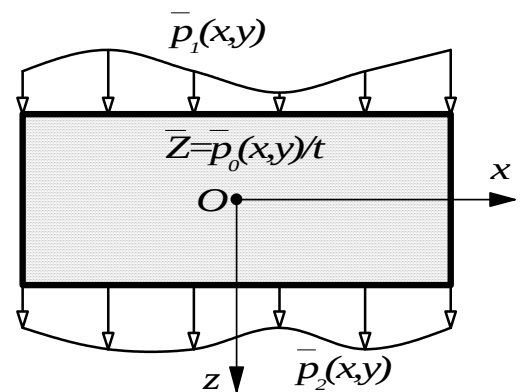


図 1. 横荷重の構成

キーワード：厚板，横せん断変形，面内変形挙動，板厚方向垂直応力，荷重構成

〒326-8558 足利市大前町 268-1 足利工業大学 都市環境工学科 TEL: 0284-62-0605 FAX: 0284-64-1061

3. 解析モデル

本研究では、周辺単純支持された矩形平板を解析対象とする。解析モデルの形状は正方形とし、幅厚比 $\mu = t/a$ を種々変化させて解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。横荷重については、全面等分布荷重としたが、荷重が物体力なのか表面力なのかを明確に区別した。数値計算に当たっては Fourier 解析を実施し、図2に示した板厚方向の線分 AA' ($x = a, y = b/2$)、 BB' ($x = a/2, y = b/2$) および CC' ($x = a/4, y = b/4$) に沿った変位分布や応力分布を求めた。解析結果の比較対象として、三次元弾性解析および代表的な高次理論である、Lo-Christensen-Wu 理論に基づく解析も実施した。

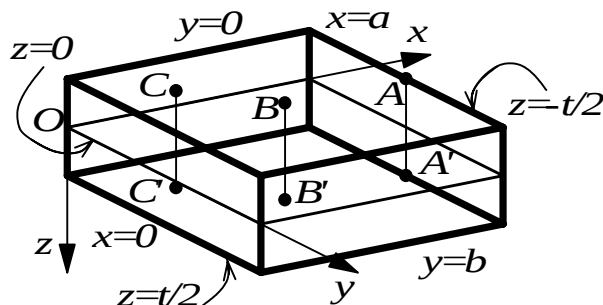


図2．解析モデル（矩形平板）

4. 数値計算結果

解析結果の一部を図3および図4に示す。図3は、図2の線分 AA' に沿った面内変位 U の分布を表しており、図4は線分 CC' 上の横せん断応力の分布を表している。両図とも、縦軸には無次元化座標 $\zeta = z/t$ をとっており、図の上下が板の上下面にそれぞれ対応している。また、横軸については、図3では無次元化変位 $\alpha = u/a$ 、図4では無次元化せん断応力 $\tau^* = \{(1-2\nu)/2G\}\tau_{xz}$ をそれぞれとった。両者とも、幅厚比 $\mu = 0.5$ のモデルに上面等分布荷重が作用した場合の結果である。いずれの図においても、プロットが本論文の平板理論に基づく結果、太線が三次元弾性解析、細線が Lo-Christensen-Wu 理論による結果をそれぞれ示している。

図3から明らかなように、面内変位分布については、3者の結果は概ね一致した分布形状を示している。図4に示した横せん断応力の分布を見ると、本研究の結果は Lo-Christensen-Wu 理論による結果とは一致したもの、三次元解析の結果とは若干の差異を生じている。全体的に、本研究の平板理論は、Lo-Christensen-Wu 理論とほぼ同様の精度で解析できていることが分かった。

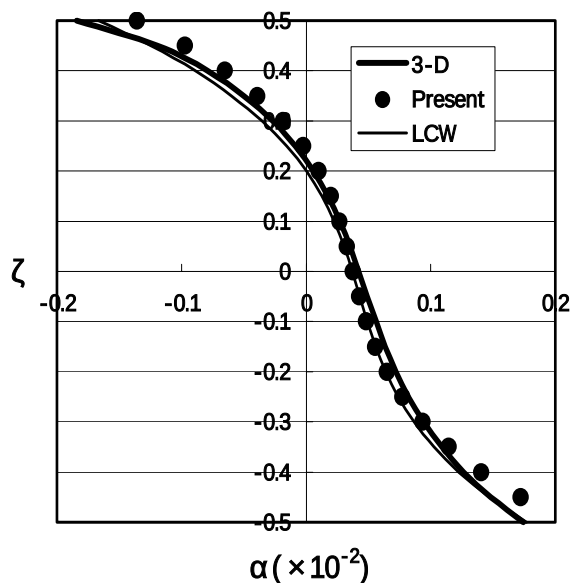


図3．面内変位分布

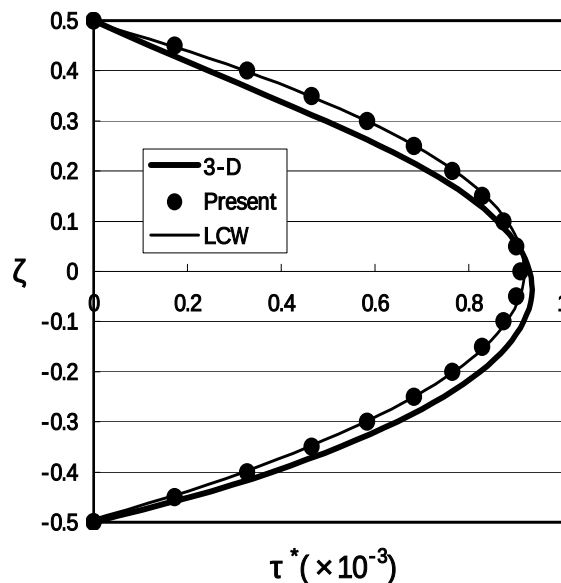


図4．横せん断応力分布

5. まとめ

比較的 low order の変位場を仮定し、古典理論と同程度の簡明な平板理論を構築した。応力 - ひずみ関係に板厚方向垂直応力の影響を加味し、横荷重の構成を明確に区別した結果、たわみの分布を高次化することなく面内変形を解析し得ることが分かった。数値計算結果から、本研究で構築した平板理論は、幅厚比のかなり大きな板に対しても、代表的な高次理論とほぼ同程度の解析が可能であることを明らかにした。

- 参考文献**：1) 末武・友田：厚板解析における横荷重の影響に関する一考察，応用力学論文集，Vol.7, No.1, pp.47-56, 2004.
2) 末武：厚板の曲げ解析における横荷重評価の影響，応用力学論文集，Vol.8, No.1, pp.25-32, 2005.