# 微係数の連続性を有する変位関数を用いたはりの一般化高次有限要素法解析

福島工業高等専門学校　正会員　根岸 嘉和

## １．緒　言

本報告では、著者らの提案になる一般化高次はり理論[1)]の考え方（２次元はりの変位成分を高さ方向座標のべき級数で仮定する手法）に基づく有限要素法のさらなる精度改善を目指す試みの一環として、これまでの、軸方向に０階微係数の連続性のみを有する変位関数に代わり、１階微係数の連続性を有する高次変位関数を採用した一般化高次有限要素法を構築し、その精度について検討する。

## ２．一般化高次理論

**図-1** に示す座標系で、はり(均質等方性)の境界面に分布荷重を載荷した問題の一般化高次理論の概要を示す。

はりの変位成分 $u_i : i = x,z$ を次式のように高さ方向座標 $z$ のベキ級数($N$:理論の次数)で展開する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x) \tag{1}$$

変分原理により、変位係数 $u_{j(n)}(x)$ の支配方程式が境界条件式とともに、次式のように導かれる。

$$\sigma_{ix,x}^{(n)} - n\sigma_{iz}^{(n-1)} + F_i^{(n)} = 0 \tag{2}$$

上式の各項は次式の高次断面力と荷重項である。

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z^n dz, \qquad F_i^{(n)} = \left[\bar{\sigma}_{zi} z^n\right]_{z=-h/2}^{z=h/2} \tag{3}$$

## ３．精密化有限要素法の構築

はり要素内の変位成分 $u_i : i = x,z$ を高さ方向に**図-2** のように $z$ のベキ級数 $z^n$ で展開仮定する。また、長さ方向には前報[3)]等で用いた変位関数(任意２次関数)のように変位の連続性のみを満たし、その微係数の連続性は満たさない $C^0$ 連続性関数に代わり、微係数の連続性を満足する $C^1$ 連続性関数 $N^{[m]}(\xi);\xi = x/(l/2)$；m=1～4 を採用し、これらと係数 $u_{i(n)}^{[m]}$ との積を重ね合わせた任意の３次関数として、変位成分を次式で仮定する。

$$u_i = \sum_n z^n u_{i(n)}(x) = \sum_n z^n \sum_{m=1}^{4} u_{i(n)}^{[m]} N^{[m]}(\xi) \tag{4}$$

これをﾏﾄﾘｯｸｽ表示すると次式のようになる。

$$\{\boldsymbol{u}\}=[\boldsymbol{N}]\,\{\delta\} \tag{5}$$

$\{\delta\}$ ははり要素の２節点での節点変位 $u_{i(n)}^{[m]}$ を成分とする変位ﾍﾞｸﾄﾙであり、曲げ挙動では次式となる。

$$\{\delta\} = \sum_{N=1}^{N}\sum_{p=1}^{4}\{u_{z(2n-2)}^{[p]}; u_{x(2n-1)}^{[p]}\} \tag{6}$$

幾何学的関係式より、ひずみﾍﾞｸﾄﾙ $\{\varepsilon\}$ は、

$$\{\varepsilon\}=[\boldsymbol{N'}]\,\{\delta\} \tag{7}$$

構成関係式より、剛性係数ﾏﾄﾘｯｸｽ $[D]$ を用いた応力ﾍﾞｸﾄﾙ $\{\sigma\}$ は、

$$\{\sigma\}=[D]\,\{\varepsilon\}=[D]\,[\boldsymbol{N'}]\,\{\delta\} \tag{8}$$

と求まり，仮想仕事の原理より次の剛性方程式を得る。

$$\{\boldsymbol{f}\}=[\boldsymbol{k}]\{\delta\} \tag{9}$$

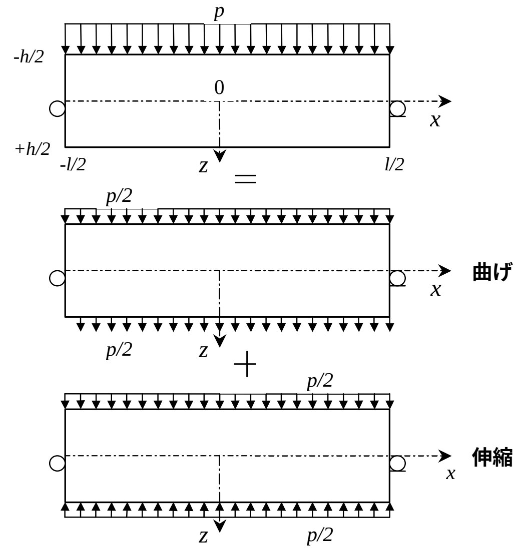
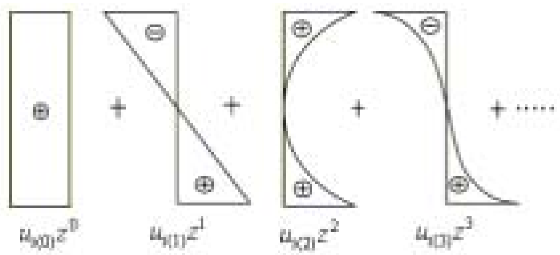



**図-1　座標系とはりの曲げ挙動・伸縮挙動**



**曲げ**　uz : n=0,2,4,~　　ux,: n=1,3,5,~

**伸縮**　uz : n,: n=1,3,5,~　ux, : : n=0,2,4,~

**図-2 変位係数 ui(n) の高さ方向分布**

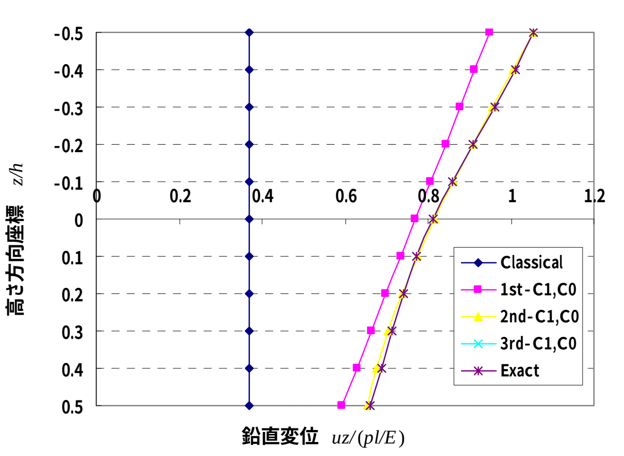



**図-3　最大鉛直変位 uz の高さ方向分布**(h/l=0.75,v=0.3)

キーワード：有限要素法　一般化高次理論　はり曲げ、連続変位関数

〒970-8034 福島県いわき市平上荒川字長尾 30　福島工業高等専門学校 建設環境工学科　Tel 0246-46-0831

なお要素剛性ﾏﾄﾘｯｸｽ $[\boldsymbol{k}]$は次式で計算される。

$$[\boldsymbol{k}] = \int [\boldsymbol{N'}]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{D}] [\boldsymbol{N'}]\, dV \qquad (10)$$

また、変位ﾍﾞｸﾄﾙの成分 $u_{i(n)}^{[m]}$ に対応した節点力ﾍﾞｸﾄﾙ$\{\boldsymbol{f}\}$の成分 $f_{i(n)}^{[m]}$ は次式で求められる。

$$f_{i(n)}^{[m]} = \int_{-l/2}^{+l/2} [p(x) u_{z(n)}^{[m]}(x)]_{z=-h/2}^{z=+h/2} dx \qquad (11)$$

## ４．解析例

厳密解のある境界条件のはり（端面がその面内に変形しない：両端面内点の軸直角方向変位≡０の単純支持）の問題を解析する。本問題は端面がその面内に変形するはり（中立軸位置点のみ鉛直変位＝０の単純支持）の問題に比して、はりの曲げに伴う伸縮挙動の解析結果が全体挙動の解析精度に大きく影響する問題である。

**図-1** の単純ばり ($h/l$=0.75, ν=0.3)に等分布荷重 $p$が満載された場合を，本手法のｎ次理論要素(n=1～3:各々1st,2nd,3rd と略記)に基づく $C^1$ 連続性モデルならびに $C^0$ 連続性モデルの各有限要素法で解いた。同時に、Bernoulli-Euler 古典はり理論に基づく有限要素法(Classical)による解析を行い、厳密解(Exact)[2]との比較を通じて精度の検証を行う。

**図-3 と図-4** にはり中央位置での鉛直変位 $u_z$ およびはり端面の軸方向変位 $u_x$ の高さ方向分布の収束解(16 要素)を示す。

これら変位に関しては、$C^1$ 連続性モデルは各理論次数の収束解とも $C^0$ 連続性モデルの収束解と全域にわたって一致した分布を与えている。古典理論要素(Classical)による、たわみに当たる一定値の $u_z$ ならびに伸縮挙動無視した直線変化の $u_x$ から、両変位とも 1st ではせん断変形と伸縮挙動を含む直線分布となって精度が向上し、2nd は 3rd に近似した曲線分布を与え、3rd は厳密解に一致しており、精度の向上性と良好さが示された。

**図-5 と図-6** に、はり中央位置における曲げ応力 $\sigma_{xx}$ および軸直角方向垂直応力 $\sigma_{zz}$ の各理論要素の収束解の高さ方向分布を示す。

これらの応力に関しても、$C^1$ 連続性モデルは各理論次数の収束解とも $C^0$ 連続性モデルの収束解と全域にわたって一致した分布を与えている。精度に関しては、曲げ応力 $\sigma_{xx}$ で 2 次理論要素解(2nd)は 3 次理論要素解(3rd)にかなり近い値を与え、3rd は厳密解に一致している。

他方、高さ方向垂直応力 $\sigma_{zz}$ は 2nd と 3rd の差が大きく、3rd の解も厳密解との誤差を呈している。なお、せん断応力 $\sigma_{xz}$ でもほぼ同様な傾向がありさらに精度の悪化が見られる事を付記する。

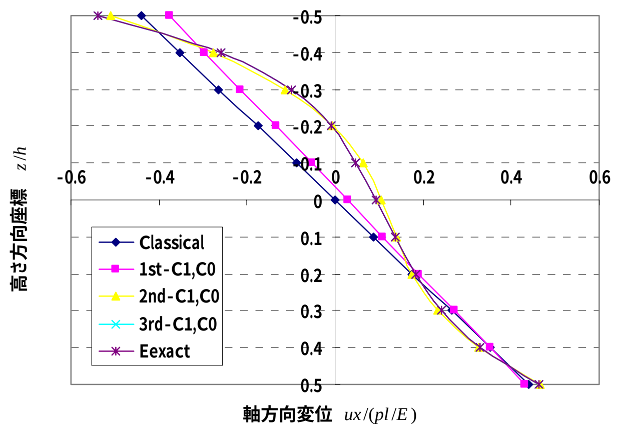



図-4　最大軸方向変位 $u_x$ の板厚方向分布($h/l$=0.75, $\nu$=0.3)

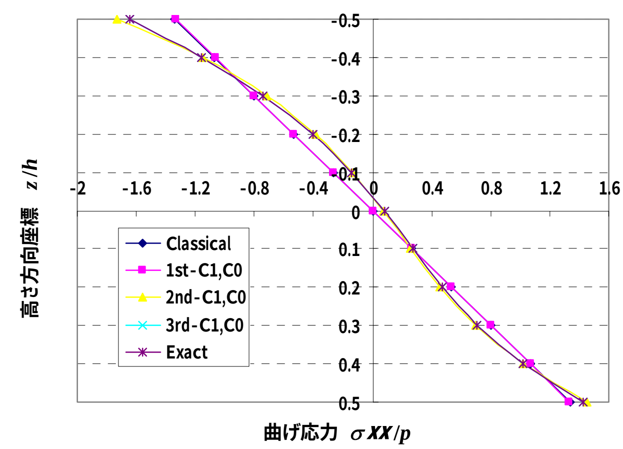



図-5　曲げ応力 $\sigma_{xx}$ の高さ方向分布($h/l$=0.75,n=0.3)

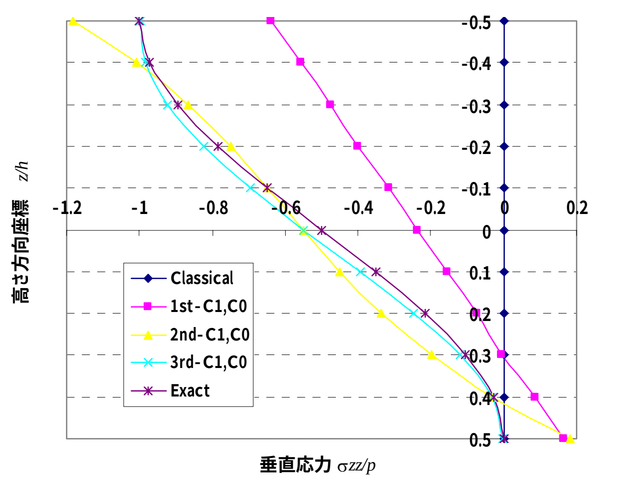



図-6　軸直角方向垂直応力 $\sigma_{zz}$ の高さ方向分布
($h/l$=0.75, ν=0.3)

## ５．理論および精度特性

これらの結果から、各要素解の精度は、はり軸方向変位関数の次数ならびに連続性／不連続性に依るよりも、高さ方向分布次数に依る方が支配的であり、その高次化によって厳密解を目標値とした解析が可能となる事が再確認された。

**参考文献**
1) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文集, 350 号/Ⅰ-2, pp.351-354, 1984.
2) Pagano,N.J.：Journal of Composite Materials, Vol.4, pp.20-34, 1974.
3) 根岸嘉和：平成 17 年度 東北支部技術研究発表会講演概要, pp.38-39, 2006.
4) 根岸嘉和：第 55 回 理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2006, pp.685-686, 2006.