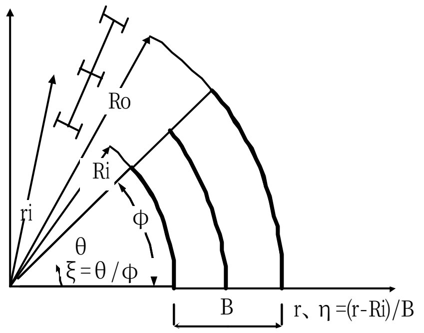
補剛扇形板の曲げ解析に対する Spline 要素法の適用

信州大学大学院　学生員　○田辺　良太
信州大学　正員　清水　茂
大同工業大学　正員　水澤　富作

1．はじめに　曲線橋のデッキプレートは，扇形板とこれを弾性支持する曲線梁などとの複合構造となるが，従来この複合構造の設計では，曲線直交異方性板理論[1)]や床板と補剛桁の連成を無視した近似計算法などが採用されている．直行異方性板理論では補剛桁の少ない構造や等価剛度の算定が問題になるので，板と梁の連成を考慮した板－梁理論を適用すれば，より合理的な設計が可能になる．曲線梁で補剛された扇形板の曲げ解析には，不静定余力法を適用した金子の研究[2)]や，差分法を適用した大塚の研究[3)]がある．最近，Harik ら[4)]は，Levy 法と Bessel 関数を適用して，補剛扇形板のたわみの解析解を示しているが，Bhimaraddi ら[5)]の有限要素解と比較して，かなり異なったたわみの分布性状が示されている。

本研究では，spline 要素法[6)]を用いて，補剛扇形板の曲げ解析を行い，補剛扇形板に対する本手法の有用性や解の収束性等について検討する．また，補剛板のたわみや断面力の分布性状に与える補剛梁の剛性比，中心角と半径比などの影響について明らかにする．

2．解析手法　定式化では以下のような解析仮定を設ける．
1)曲がり梁は，そり剛性を無視した Euler ばりであり，また板中央面に対して対称に補剛する．2)扇形板は薄板理論でモデル化し，補剛桁と剛結していると仮定する．3)扇形板の境界条件は，仮想バネ法[6)]を用いて導入する．図－1 に示すような等分布満載荷重を受ける円周方向に曲がり梁で補剛された扇形スラブの基礎式は，全ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて導かれる．変位関数は，次式のように無次元極座標$\left(x = q/f, h = r - R_i/B\right)$を用いて，R，θの二方向に$B-Spline$関数を仮定する．



図－1　曲線補剛スラブと無次元極座標

$$W(x,h) = W_{mn}(x,h) = \sum_{m=1}^{i_q}\sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(x) N_{n,k}(h) \tag{1}$$

ここに$i_q = k-1+m_q$，$i_r = k-1+m_r$，$N_{m,k}(x), N_{n,k}(h)$は正規化した$B-Spline$関数であり，k－1 は spline 次数，m_q，m_rはそれぞれ，θ，r 方向の要素分割の数である．C_{mn}は未定係数であり，ポテンシャルエネルギー最小の原理で求める．扇形板のひずみエネルギーは，次式で与えられる．

$$U_p = \left(Df/2B^2\right)\int_0^1\int_0^1 \Big[\Big[\left\{\left(\partial^2 w/\partial h^2\right) + (1/A)\left(\partial w/\partial h\right) + \left(1/A^2 f^2\right)\left(\partial^2 w/\partial x^2\right)\right\}^2\Big] - 2(1-n)\left[\left(\partial^2 w/\partial h^2\right)\right.$$
$$\left.\left\{(1/A)\left(\partial w/\partial h\right) + (1/Af)^2\left(\partial^2 w/\partial x^2\right)\right\} + \left\{(1/Af)\left(\partial^2 w/\partial h\partial x\right) - \left(1/A^2 f\right)\left(\partial w/\partial x\right)\right\}^2\Big]\Big] A\,dh\,dx \tag{2}$$

また，曲げとねじり剛性を考慮した曲線補剛桁のひずみエネルギーは，次式で与えられる．

$$U_b = \left(f/2B^3\right)\sum_{i=1}^{N_c}\left\{EI_i\int_0^1\left(1/A^3\right)\left[\left(1/f^2\right)\left(\partial^2 w/\partial x^2\right) - A\left(\partial w/\partial h\right)\right]^2 dx + \left(GJ_i/f^2\right)\int_0^1\left(1/A^3\right)\left[\left(\partial^2 w/\partial x^2\right) + A\left(\partial^2 w/\partial x\partial h\right)\right]^2 dx\right\}_{h=h_i} \tag{3}$$

ここに，$A = h + 1/(l-1)$，板幅B，半径比$l = R_o/R_i$，外径R_o，内径R_i，中心角f，板の曲げ剛性D，ポアソン比n，補剛桁の本数N_c，EIとGJはそれぞれ梁の曲げ剛性，ねじり剛性である．また外力ポテンシャルは次式で与えられる．

$$V = qB^2 f\int_0^1\int_0^1 WA\,dh\,dx \tag{4}$$

ここに，q は荷重強度である．曲線補剛スラブの全ポテンシャルエネルギーは次式で表される．

$$\Pi = U_p + U_b - V \tag{5}$$

式(1)を式(5)に代入して，極値化すれば，代数方程式が求められる．$d\Pi = d(U-V) = [K]\{d\} - \{f\} = 0$ (6)

ここに$[K]$は剛性マトリックスであり，$\{f\}$は外力ベクトルである．また$\{d\} = \{C_{11}C_{12}\cdots C_{mn}\cdots C_{i_q i_r}\}^T$である．

キーワード　spline 要素法，扇形板，曲がり梁，補剛板
連絡先　〒380-8553　長野県長野市若里 4-17-1　信州大学工学部　TEL　026－269－5000

3.　数値計算例および考察

表－1 には，半径方向の２つの直線辺が単純支持され，２つの円弧辺を曲線梁で補剛した扇形板（$f=60°$, 半径比 $l=2.0$）の中央点でのたわみと曲げモーメントの収束性に与える要素分割数の影響が示してある．ただし，曲がり梁の曲げ剛性比, $d = EI/DB = 22$，ねじり剛性比 $k = GJ/DB = 1.5$にとり，ポアソン比 $n = 0.3$，spline 次数 k－1=4 に仮定し，要素分割数を 6 から 90 まで変化させた．これより，分割数を増やせば一定値への安定した収束性が得られている．次に本手法（SEM）の解析精度を示すために，２辺単純支持，他の２つの自由辺に補剛梁を有する正方形板の曲げ解析を行い，Timoshenko[7)]の解析解や Harik ら[4)]の Analytical Strip Method の解との比較が表－2 に示してある．ここで，$f = 0.0057$，$l = 1.0001$，d は10^{10}から 0 まで変化させている.ただし，$k = 0.0$である．これより，本手法の値は，解析解と比較して，1%以内の誤差に収まり，良い精度が得られている．

表－1　補剛扇形板の中央点における解の収束性に与える要素分割の影響

$m_\theta \times m_r$	w	M_θ	Mr
6×6	5.2121	2.0167	3.2986
10×10	5.2122	2.0166	3.2990
14×14	5.2122	2.0166	3.2989
30×30	5.2122	2.0166	3.2988
90×90	5.2122	2.0165	3.2988
乗数	$qB^4/D\times10^{-3}$	$qB^2\times10^{-2}$	$qB^2\times10^{-2}$

表－2　正方形補剛板中央点におけるたわみおよび曲げモーメントの精度比較

δ	Method	w	Mx	My
∞	SEM	0.00406	0.04788	0.04788
	Timoshenko[7)]	0.00406	0.04790	0.04790
100	SEM	0.00409	0.04812	0.04781
	Timoshenko	0.00409	0.04810	0.04770
30	SEM	0.00416	0.04867	0.04766
	Timoshenko	0.00416	0.04860	0.04730
10	SEM	0.00434	0.05018	0.04723
	Timoshenko	0.00434	0.05000	0.04650
	Harik ·Haddad[4)]	0.00434	0.05040	0.04730
0	SEM	0.01309	0.12252	0.02707
	Timoshenko	0.01309	0.12250	0.02710
	Harik ·Haddad	0.01309	0.12280	0.02710
	乗数	qB^4/D	qB^2	qB^2

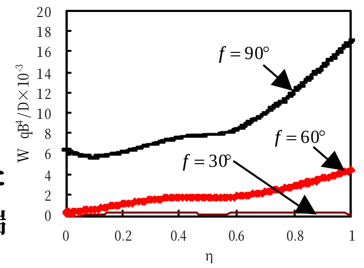
表－3 には，大塚[2)]が差分法で求めた半径方向の 2 つの直線辺が単純支持され，２つの円弧辺を曲がり梁で補剛した扇形板($f = 60°, l = 3.2$)の中央点のたわみwと曲げモーメント M_r の値と比較した結果が示してある．差分法の解は，9×9 と比較的粗い分割で求めた値であるが，本手法の結果と比較してよく一致している．次に，３つの曲がり梁で等間隔に補剛された扇形板の曲げ解析を行い，中央断面（ξ=0.5）でのたわみと曲げモーメントの分布性状に与える中心角 f の影響が図－2 に示してある．ただし，$l = 2.0$，$n = 0.3$，$d = 22$，$k = 1.5$とし，fを 30°，60°，90°と変化させている．これより中心角を大きくすると，たわみと曲げモーメントの値が増大する．また中間補剛桁上で，曲げモーメントの不連続点が発生する．内側の補剛桁上の曲げモーメントは，中心角の増大とともに外側の桁上の値と比較して，かなり大きな値が示されている．

表－3　扇形補剛板の中央点 における 解の精度比較

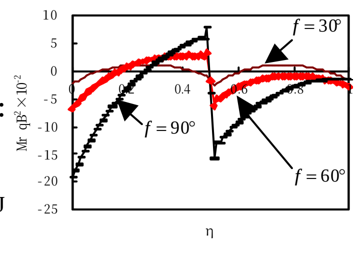
δ	κ	差分法[2)] (分割9、α=40、β=2) w	M_θ	Mr	SEM (分割30×30、k-1=4) w	M_θ	Mr
0.00	0.00	2.37	15.5	-0.13	2.34	15.6	-0.09
0.01	0.00	2.33	15.2	0.00	2.28	15.2	-0.04
14.7	3.89	0.30	3.20	3.33	0.27	2.89	3.22
27.3	7.21	0.27	2.93	3.33	0.24	2.70	3.28
46.6	12.3	0.23	2.80	3.33	0.22	2.60	3.31
∞	∞	0.22	2.60	3.33	0.19	2.46	3.35
乗数		$qB^4/D\times10^{-2}$	$qB^2\times10^{-2}$	$qB^2\times10^{-2}$	$qB^4/D\times10^{-2}$	$qB^2\times10^{-2}$	$qB^2\times10^{-2}$

4．まとめ

本研究で得られた結果をまとめると，以下の通りである．(1)本手法は，補剛扇形板の曲げ解析にも適用でき，分割数を高めると安定した収束性が得られる．(2)曲がり梁で補剛された扇形板の曲げモーメントは，両端の桁を除き，不連続な分布性状を示す．(3)補剛桁上で生じる不連続な曲げモーメントの値は，中心角が 30°以内になると小さくなり，また，半径比が大きくなると小さくなる．



(a)　wの分布



(b)　M_rの分布

図－2　たわみ，曲げモーメントの分布性状に与えるfの影響

参考文献　1) 芳村仁、日下部毅明：構造工学論文集、Vol. 36 A, pp.273-283, 1990,　2) Otsuka, H：JSCE, No.220,pp.107-115, 1973,　3)金子忠男：川崎製鉄技報 Vol.5,pp. 312-336 1973,　4)Harik and Haddad：J of Engrg Mech, Vol.113,1809-1825,1987,5) Bhimaraddi, A. ,Moss P. J and Carr, A .J.：J of Engrg Mech, Vol.115,pp.2074-2088 ,1989,6)Mizusawa,T :Atchive of Applied Mech, Vol. 62, pp. 62-71, 1992,7)Timoshenko.S.P.：板とシェルの理論、ブレイン図書出版, 1973