

円筒シェル座屈からの新しい構造形態の創生法

広島大学 正会員

○有尾 一郎

Univ. of Bath

G.W.Hunt

1. はじめに

2つの堅固な円筒を隙間をつかって一列に並べ、それにロール紙を巻き付け固定し、その両側でねじるとき、円筒周りにセン断が働き、Fig.1に示されるような捩れ座屈パターンが現れる¹。このとき、その紙面内には曲げも含まれるが、微小なストレッチも働く張力場が形成される。しかし、ねじり作用下の円筒シェルの初期座屈問題 (Fig.2)² は等しい部分で曲げとストレッチのエネルギーが含まれる。三角形のトラス形成の視点から見られるような最後の座屈パターンに、1次近似の後座屈を経たモード形の結果により報告する。

2. 全ポテンシャルと線形固有値解析

円筒の臨界座屈と1次近似の後座屈解析は以下の全ポテンシャル関数に基づく。

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_b + \mathcal{V}_m + \mathcal{V}_T + \mathcal{V}_c \quad (1)$$

ここに、それぞれの力学エネルギーは

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_b &= \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ (\nabla^2 w)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) [(w_{xy})^2 - w_{xx}w_{yy}] \right\} dydx \\ \mathcal{V}_m &= \frac{Et}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ (\nabla^2 \phi)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu) [(\phi_{xy})^2 - \phi_{xx}\phi_{yy}] \right\} dydx \\ \mathcal{V}_T &= -\tau t \int_0^L \int_0^{2\pi R} w_x w_y dydx \\ \mathcal{V}_c &= -Et \int_0^L \int_0^{2\pi R} \phi \left[\nabla^4 \phi + \rho w_{xx} \right. \\ &\quad \left. - (w_{xy})^2 + w_{xx}w_{yy} \right] dydx. \end{aligned}$$

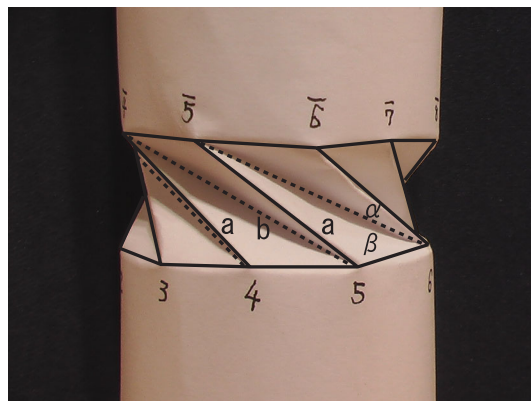


Fig. 1 円筒の捩れを伴うクレスリングパターン

から成り、ここに、 $w(x, y)$ は半径方向のたわみを、 $\phi(x, y)$ は応力関数である。 $\mathcal{V}_b$ は曲げエネルギーを、 $\mathcal{V}_m$ は膜エネルギーを、 $\mathcal{V}_T$ はトルクによる外力エネルギーを、 $\mathcal{V}_c$ は w 表面のガウス曲率に変換するための応力関数 ϕ がリンクする、von Kármán–Donnell 方程式からの制約条件から得られる組合せエネルギーである。Rayleigh-Ritz 法あるいは Galerkin 法では、モード形状は

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{i=1}^2 A_i f_i(x, y), \\ \phi(x, y) &= \sum_{i=1}^2 B_i f_i(x, y) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

と表し、ここに、

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sin^m \left(\frac{\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{\lambda x}{L} - \frac{ny}{R} \right), \\ f_2(x, y) &= \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \end{aligned}$$

と仮定する。ここに、 A_i, B_i は未知係数である。べき数 $m = 1, 2$ はツイスト長さの端部が単純支持と固定支持の2つの境界条件に対応する。最小値 $\min \mathcal{V}$ になるように、臨界トルク T^C に

¹ 特に、この周期凹凸の斜めパターンをクレスリングパターンと呼ばれている。

² Figs.1,2の両者は回転対称・鏡映非対称型の座屈波形を示す。

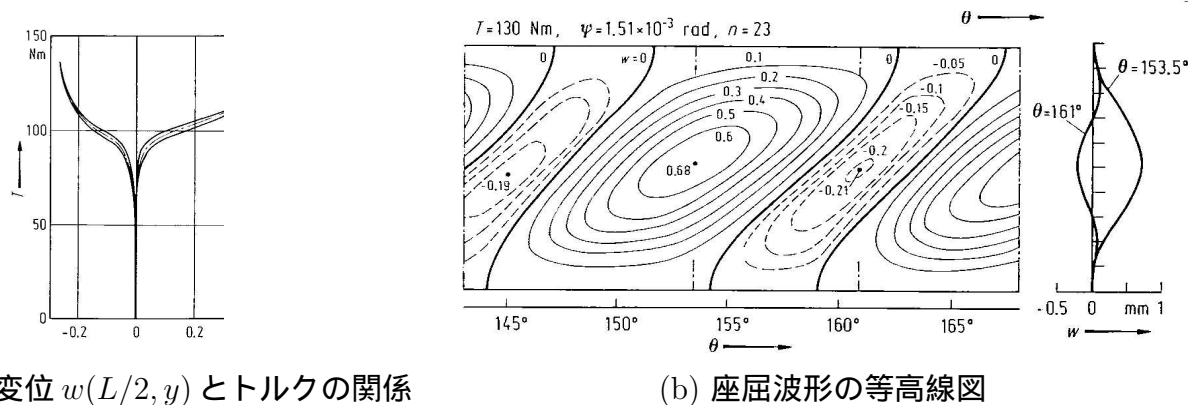


Fig. 2 Yamaki の捩り作用下の円筒シェル座屈 文献¹⁾から引用. Length $L = 22.9 \text{ mm}$, Radius $R = 100 \text{ mm}$, thickness $t = 0.247 \text{ mm}$, Young's modulus $E = 5.55 \text{ GPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0.3$.

Table 1 後座屈からのトルク変化と角度 γ の変化 ($R = 21.5 \text{ mm}$, $L = 19 \text{ mm}$, $t = 0.106 \text{ mm}$, $n = 9$).

A_1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
T/T^C	1.000	0.945	0.791	0.573	0.360	0.216	0.135	0.087
$\gamma[\text{deg.}]$	53.3	53.7	54.4	55.3	55.2	53.1	49.7	46.4

対応する A_1 , B_1 , n, λ を考慮し, 線形固有値解析を行った上で A_2, B_2 をセットした。

3. 1次オーダーの後座屈解析

式(2)の完全な波形が採用されれば, Figs.1,2に見られるように, 係数 A_1, B_1 は内側の変形が外側よりも大きい対称性破れ則の A_2, B_2 に影響する。典型的な紙供試体に対する後座屈解析のような結果は Table 1 に示す。エネルギー最小化は斜めの角度 γ に関するそれぞれの段階で実行される。後座屈の発展として紙面の峰と谷ライン間の γ の減少は, 系がフォールディングに順応するように調整され, さらに斜めに変形するように示す。峰と谷ラインのこの同じ問題は Yamaki の結果と比較した。ここに, γ の実験値は, 座屈の最初の段階における線形固有値問題の適用に対して, それらよりも常時小さい値を示す。そのメカニズムを完全に適用するために, この適性は Rayleigh-Ritz 近似の制約を持って適用可能であるけれども, 峰と谷ラインは異なった量によって回転しなければならないであろう。

4. 座屈からの新しい軽量構造の創造

円筒シェルの初期座屈と後座屈において, 適当な斜めのパラメータ $\lambda(\gamma)$ と波数 n の最小ポ

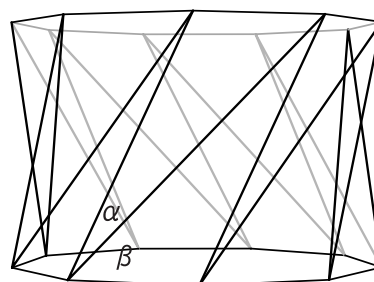


Fig. 3 新しく創生されたデザイン

テンシャルエネルギーになるとき, それは必然的な結果となる。そこで, 我々はその円筒シェルの捩れ座屈波形形成のメカニズムに基づく, 新しい構造形態の創生法を考案した。例えば, ストレッチに抵抗する部位となる, 峰と谷ラインを Fig.3 に示すように取り出して, トラス構造の幾何学的に軽量で安定的な新しい構造物の創造を分析してきた。

謝辞

本研究は科学研究補助金基盤研究(C)の課題に対する成果の一部であり, ここに謝意を表す。

参考文献

- 1) Yamaki, N. (1976) Experiments on the post-buckling behaviour of circular cylindrical shells under torsion. Applied Mathematics and Mechanics. Springer-Verlag.