地震観測記録等による逆解析手法について－距離減衰式その他に見られる誤り－

正会員　○安藤幸治
首都大学東京　　都市環境学部　フェロー会員　　岩楯敞広

1. はじめに

地震観測記録等を用いた逆解析では，最小二乗法に基づく正規方程式の係数行列の特異性が常に問題になる．その要因は，解析が振動系に対して想定した数値モデルの自由度（あるいは地盤モデルの場合の層数）に比較してわずかな個数の観測記録を使用して行なわれることにある．数値モデルの全自由度に対応する観測記録があれば，全ての物性値パラメータに対して有意な感度量（ヤコビアン行列）が求められ，各々変動すべき方向および量が決定されるが，観測記録が限られている場合は有意な感度量を与え得るパラメータは一部であり，その影響が係数行列の特異性として現れる．はじめに正規方程式の解法として特異性の考慮可能な特異値分解法についてその概略を述べる．そして特異性とトレードオフの関係について触れ，最小二乗法の前提条件となる正規分布の性質について距離減衰式その他を例に挙げて述べていく．

2. 特異値分解法[1)]

今，m 個のパラメータを $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m)^T$，$n$ 個の観測値を $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)^T$ $(n\geq m)$ とし，両者は次式により関係付けられているものとする（ここに，マトリックスとベクトルは太字で表す）．

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は回帰式である．

以下では非線形問題を取り上げる．解 $\boldsymbol{x}$ の近似値 $\boldsymbol{x}_0$ の微小補正量 $\Delta\boldsymbol{x}$ に関して線形化を行えば次のようになる．

$$\boldsymbol{y}\approx\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} \tag{2}$$

ここに，行列 $\boldsymbol{A}$ $(n\times m)$ はヤコビアン行列である．

$\Delta\boldsymbol{x}$ は，最小二乗法により，次式で表される目的関数 ε の最小化必要条件式より求められる．

$$\varepsilon=\left[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}\right]^T\left[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}\right] \tag{3}$$

必要条件式 $\partial\varepsilon/\partial\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ より，補正量 $\Delta\boldsymbol{x}$ に関する方程式（正規方程式）は次のようになる．

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \tag{4}$$

ここに，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ である．

式(4)の解 $\Delta\boldsymbol{x}$ は，係数行列 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の特異性が考慮できるように，次式のように予め $\boldsymbol{A}$ を特異値分解して求める．

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^T \tag{5}$$

ここに，$\boldsymbol{U}$ $(n\times n)$，$\boldsymbol{V}$ $(m\times m)$ は，それぞれ $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_r$ を，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_r$ を列ベクトルに持つ行列である．$\boldsymbol{\Lambda}$ $(n\times m)$ は，対角項に m 個の特異値 λ_r を持ち，他の要素はゼロである．ここに，λ_r は大きい順 $\lambda_1\rangle\lambda_2\rangle\lambda_3\rangle\cdots\rangle\lambda_m$ に配置する．

また，固有ベクトル $\boldsymbol{v}_r$，$\boldsymbol{u}_r$ は次の直交性を満たす．

$$\boldsymbol{v}_r{}^T\boldsymbol{v}_s=\delta_{rs}v_r \quad , \quad \boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{u}_s=\delta_{rs}u_r \tag{6}$$

ここに，δ はクロネッカーのデルタである．

式(5)より，式(4)の $\Delta\boldsymbol{x}$ は次のようになる．

$$\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{b}=\sum_{r=1}^{m}\lambda_r^{-1}\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{b}\boldsymbol{v}_r \tag{7}$$

もし $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ が特異であれば，その行列式は固有値の積で表されるのである次数以降にゼロあるいは極めて小さい固有値が並ぶ．よって，$\Delta\boldsymbol{x}$ は，λ_r の相対比を考慮して次式を満たす固有値を採用して求められる．

$$\lambda_r/\lambda_1\geq\gamma \tag{8}$$

この解法が特異値分解法である．同法では γ は 10^{-3} 位の値を採る．

ところで，式(6)より，式(4)の右辺 $\boldsymbol{b}^7=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{b}^7=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{b}=\sum\lambda_r\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{b}\boldsymbol{v}_r \tag{9}$$

即ち，$\boldsymbol{b}^7$ は直交座標系 $\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{v}_r\}^r$ 上のベクトルである．元々，$\boldsymbol{b}^7$ は座標系 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{a}_r\}$ 上のベクトルであるが，式(9)より，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ が特異な場合は比較的低い次数 r の直行ベクトルに縮約されることを示唆する．そこで解 $\Delta\boldsymbol{x}$ の計算は，次のような手順で実施する．①$r=1$ から始めて部分空間 $\boldsymbol{v}_1$ で繰り返し収束演算を行う，②$r=1$ と 2 の２つの直交空間 $\boldsymbol{v}_1$ および $\boldsymbol{v}_2$ 上で演算を繰り返す，③解の動向を見ながら次数を上げて同様の計算を実施する，④ある次数 s で解が発散したとき，その直前の次数 $s-1$ の解を最適解とする．

キーワード：逆解析，特異性，距離減衰式，最小二乗法
連　絡　先：〒207-0014　東京都東大和市南街5-39-16　tel 042-563-6751

3. 計算例－トレードオフの問題

首都大学東京では逗子市の防災[2)]に資するため逗子市内の地表5地点と深さ30mの基盤において，平面・鉛直アレー地震観測を実施している．ここでは鉛直アレー地震観測記録（地表面と深さ30mの記録，基盤の深さは約30m）を用いて検討した．当該地点の表層地盤は6層から成る．はじめに有意な大きさの地震記録2個を使用して時間領域でモード解析[3)]を行い地盤の固有値を求め，その結果から地盤モデルの同定解析[3)]を行い物性値（せん断波速度Vsと減衰係数h）を求めた．モード解析は固有値を，同定解析は物性値をそれぞれパラメータとする逆解析手法である．**図1**はモード解析の結果である．同定解析では，式(8)より$r=2$を与えて物性値を算出し，同様の周波数特性が得られた．同定された地盤物性値を**表1**に示す．特異性の問題は，せん断波速度を対象として同定解析で検討する．

上記のように$r=2$で最適な物性値が同定された．ここで，例えばよく使用される拡張ベイズ法の重み係数αを0.006とした場合，これは$r=3$に相当するが，一部の物性値に大きな変動が見られた（$Vs1=45.4m/s$，$Vs4=307.0m/s$）．このとき対象周波数範囲内で周波数特性に変化は見られず（$r=4$以降も同様），従って，地盤モデルはrやαの値によって変わり，少なくとも係数行列$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$の次数分は存在すると言える．よって，限られた情報量を考慮して$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$の特異値を調べ，適切な$r$や$\alpha$を決定して解析を行わなければならない．

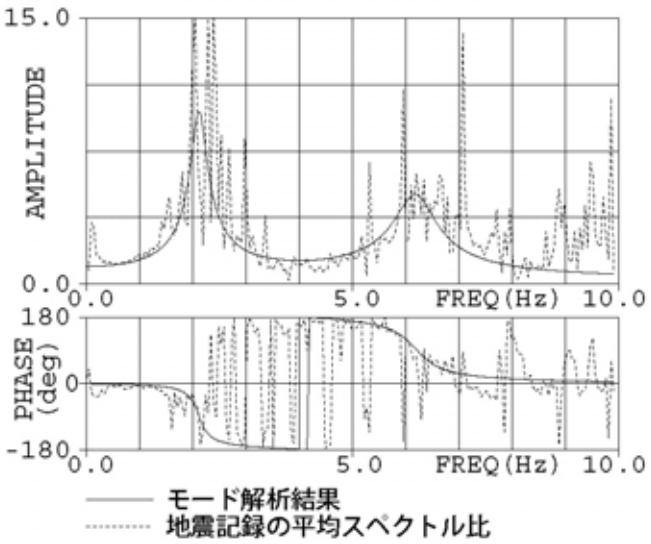

図1 地盤の周波数特性

表1 同定された物性値

o.	土質	ρ(t/m³)	Vs(m/s)	h	深度(m)
1	埋土	1.70	149.7	0.07	1.0
2	砂質土	1.80	125.7	0.05	4.0
3	シルト	1.50	210.6	0.08	20.0
4	シルト	1.90	235.2	0.03	24.0
5	シルト	2.00	252.4	0.03	25.0
6	風化土	2.00	400.6	0.03	26.0
7	基盤	2.10	700.3	0.03	30.0

4. 距離減衰式その他について

従来より数多くの距離減衰式が提案されてきた．その多くは加速度最大値あるいは速度最大値を対数値で評価して回帰式(距離減衰式)を求める方法であるが，対数値は最大値に対して非線形量であるため，その誤差分布は最大値のそれとは異なり，従って，最大値を評価して求められる結果とは異なる．即ち，対数値の真数は加速度最大値の推定値とはならない．また，一個の最大値から複数個のパラメータを決定しているため式(2)のヤコビアン行列$\boldsymbol{A}$は横長$(1\times m)$となり，展開式の段階で既に特異な問題となっている．実際の解析では多くの地震記録が使用されるが，それはパラメータの平均化のためであり，特異性は解消されない．

また，地盤物性値等の同定解析で観測記録に対して非線形量である伝達関数の絶対値スペクトルを評価して検討されることが多いが，これも理論的に間違いである．最小二乗法で対象となり得る量は，観測値とその線形の関係にあるフーリエスペクトルである．

5. おわりに

逆解析で問題になるのは正規方程式の特異性である．ここに紹介した方法は，その性質が特異値に現れるので比較的容易に解決できるものと考えられる．また，最小二乗法で評価される量は物理的に意味のあるものでなければならない．距離減衰式の対数値や絶対値スペクトルは，それ自体何ら用途がない．

参考文献

1) 安藤幸治，岩楯敞広：水平アレー地震観測記録による表層地盤特性の同定とその適用，土木学会論文集，No.731/I-63，pp.213～229，2003.7

2) Takahiro IWATATE,Akiro OHOKA Surface Ground Motion Characteristics of Zushi-site 'Memoirs of Faculty of Engineering　Tokyo Metropolitan University No ' 1996

3) 安藤幸治,岩楯敞広:時間領域のモード解析による振動系の動的特性の同定とその適用,土木学会論文集 No.450　/I-20,PP.151～160,1992.7