位相スペクトルの不確定性を考慮した非定常外乱に対するSDOF系の応答

鉄道総合技術研究所　正会員　○室野剛隆
神戸学院大学　正会員　佐藤忠信

１．はじめに

定常ランダム過程に対する応答は，入力波のフーリエ振幅特性のみを用いて，スペクトル･モーメント法により算出することが可能である．しかし，実際の地震動は非定常な不規則過程であり，定常過程に振幅変調関数を乗じて非定常な地震を模擬するなどの工夫がなされる．しかし，地震動の非定常性は位相特性により支配されており，既往の手法では、位相と応答との関係が不明瞭である．そこで，本研究では，地震動の位相特性と地震波や1自由度系（SDOF）の応答の平均値やRMSとの関係に関する数式表現を誘導した．また，Complex emvelopeの概念を用いることにより，最大応答値の期待値を算出する近似式を誘導した．

２．位相特性の確率特性

著者らの一連の研究と同様[1)~4)]に，位相$\phi(\omega)$を直接扱うのではなく，フーリエ位相スペクトル$\phi(\omega)$を角振動数ωで微分した群遅延時間$t_{gr}(\omega)$[5)]を用いて議論を進める．著者らは，これまで実際に観測された地震動の群遅延時間の平均値と標準偏差の特性について検討し，それらをマグニチュードや震央距離などのパラメータを用いて重回帰分析等を行い，そのモデルを行っている[2),3)]．これらの検討によると，群遅延時間の確率密度関数は，概ねガウス分布に従う仮定しても差し支えないと考えられる．群遅延時間$t_{gr}(\omega)$に離散化された振動数のピッチ$\Delta\omega$を乗じると，位相差分になる．すると，位相差分$\Delta\phi$の確率密度関数$p(\Delta\phi)$は式(1)で表される．

$$p\left(\Delta\phi^{(k)}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{j}{2}}\left|\mathbf{S}^{(k)}\right|^{\frac{1}{2}}}\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\Delta\phi^{(k)}-\mu^{(k)}\right)^{T}\mathbf{S}^{(j)-1}\left(\Delta\phi^{(k)}-\mu^{(k)}\right)\right\} \tag{1}$$

ここに，$\Delta\phi^{(k)}=\left(\Delta\phi_1,\Delta\phi_2,\cdots,\Delta\phi_k\right)^T$，$\mu^{(k)}=\left(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k\right)^T$，$\mu_k=\mu_{tgr,k}\Delta\omega$は振動数$\omega_k$における.群遅延時間の平均値，$\mathbf{S}$は共分散マトリクスである．群遅延時間が振動数軸である種の相関性を有しているかどうかは十分に議論がなされておらず，ここではその相関性は無視し，群遅延時間は振動数軸上で独立として扱った．

３．非定常外乱に対する１自由度系の応答の平均値および標準偏差

加速度$\ddot{z}$を有する非定常な外乱を受けるSDOF系の運動を考える．外乱$\ddot{z}(t)$を以下のように考える．

$$\ddot{z}(t)=\sum_{k=1}^{N}\ddot{z}_k(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k\cdot\cos(\omega_k t+\phi_k) \tag{2}$$

a_kは離散化された円振動数ω_kにおける振幅，ϕ_kが位相である．k次成分$\ddot{z}_k(t)$に対する1自由度系の運動方程式は，

$$\ddot{y}_k+2h\omega_0\dot{y}_k+\omega_0^2 y_k=-a_k\cos(\omega_k t+\phi_k) \tag{3}$$

となる．ここに，hは減衰定数，ω_0は固有円振動数である．式(3)の解は，特解と一般解の和で与えられるが，初期条件を考慮して解くと，変位波形$y(t)$は式(4)となる．その誘導は他の成書によって頂きたい．

$$y(t)=\sum_{k=1}^{N_f}y_k(t)=\sum_{k=1}^{N_f}\Re\left[\left|C_k\right|\cdot\left(e^{i\omega kt}+e^{-h\omega_0 t}\left(A_{k1}+B_{k1}\right)\cdot e^{i\left(\phi_k+\phi_k{}'\right)}\right)\right]=\sum_{k=1}^{N_f}D_k(t)\cdot e^{i\phi_k{}'} \tag{4}$$

なお，C_kは周波数応答関数，ϕ_k'は位相差である．式(4)を微分すると，速度波形$\dot{y}(t)$，加速度波形$\ddot{y}(t)$が得られる．k次成分の変位波形$y_k(t)$の期待値は，

$$E\left[y_k(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}y_k(t)\cdot p(\phi_k)d\phi_k=\exp(i\phi_0)\cdot D_k(t)\cdot B_k \tag{5}$$

で与えられる．故に，地震動$\ddot{z}(t)$に対する変位波形の期待値$E[y(t)]$は，

$$E[y(t)]=\Re\left[\exp(i\phi_0)\sum_{k=1}^{N_f}D_k(t)\cdot B_k\right] \tag{6}$$

となる．初期位相ϕ_0が一様乱数の場合は，$E[y(t)]=0$となる．同様に，地震動$\ddot{z}(t)$に対する変位波形の分散$Var[y(t)]$は，$Var[y(t)]=E\left[y(t)^2\right]-\left(E[y(t)]\right)^2$となるので，これを展開すると，最終的には式(7)を得る．

キーワード　位相特性の不確定性，非定常外乱，ランダム振動
連絡先　郵便185-8540　東京都国分寺市光町2-8-38　(財)鉄道総合技術研究所　耐震構造　TEL042-573-7394

$$Var[y(t)]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_f}D_kD_k^*+\sum_{k=1}^{N_f-1}\sum_{j=k+1}^{N_f}D_kD_j^*\cdot\frac{\left(\prod_{m=1}^{j}B_m\right)}{\left(\prod_{m=1}^{j}B_k\right)}+\Re\left\{\frac{1}{2}\cdot e^{2i\phi_0}\sum_{k=1}^{N_f}A_kD_k^2+e^{2i\phi_0}\sum_{k=1}^{N_f-1}\sum_{j=k+1}^{N_f}D_kD_j\cdot A_j\cdot\frac{\left(\prod_{m=1}^{j}B_m\right)}{\left(\prod_{m=1}^{j}B_k\right)}\right\}-\{E[y(t)]\}^2 \tag{7}$$

初期位相ϕ_0が一様乱数の場合は，式(7)の第 3 項および第 4 項がゼロになる．算出例を**図 1～3** に示す．

4．応答スペクトルの算定方法

任意の因果関数$y(t)$を考える．この場合，Complex emvelope 関数は，$y_c(t)=y(t)+i\cdot y_H(t)=Y(t)\cdot\exp(i\varphi(t))$で定義される [7]．$y_H(t)$は関数$y(t)$のヒルベルト変換，$Y(t)$は Complex emvelope の絶対値，$\varphi(t)$は位相である．**図 1** から分かるように，$y(t)$の RMS 値が$y(t)$の包絡線と似ていることから，$Y(t)=\alpha\cdot E_\phi\left[y(t)^2\right]$と仮定する．係数αは，ある種の peak factor である．パーセバルの定理を用いると，コンプレックス・エンベロープの振幅$Y(t)$と時間関数$y(t)$の関係として下記を得る．

$$\int_{-\infty}^{\infty}Y^2(t)dt=\alpha^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}E_\phi\left[y^2(t)\right]dt=2\times\int_{-\infty}^{\infty}y^2(t)dt \tag{8}$$

式(8)の右辺は，パーセバルの定理を用いて，入力のフーリエスペクトル$X(\omega)$と周波数応答関数$C_0(\omega)$より計算できる．これにより係数αが決定でき，包絡線$Y(t)$が式(9)により求まる．この最大値をとると，1 自由度系の応答の最大値の期待値が得られることになる．構造物の固有周期を徐々に変化させて，上述の操作を繰り返せば，位相のばらつきを考慮した応答スペクトルの期待値が得られる（**図 4**）．モンテカルロシミュレーションに算出した応答スペクトルと比べると，良好に一定しており，仮定を含めた提案法が妥当であったことが分かった．

5．おわりに

本研究では，地震動の位相特性と地震波や 1 自由度系の応答の平均値や RMS との関係に関する数式表現を誘導した．また，最大応答値の期待値を算出する近似式を導き，振動数領域から応答スペクトルを直接予測する手法を示した．現在，等価線形化法により，非線形応答スペクトルの予測まで手法を拡張している．別の機会に報告をしたい．

謝辞：本研究は，国土交通省からの補助金を得て得られた成果の一部である．

参考文献　1) 佐藤，室野，西村：震源・伝播・地点特性を考慮した地震動の位相スペクトルのモデル化，土木学会論文集 No.6121-213, 1999.，2)佐藤，室野，西村：観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化，土木学会論文集 No.640/I-50, 2000.，3)　室野，村上，佐藤：断層近傍地震動の位相特性の経験的なモデル化，第 11 回日本地震工学シンポジウム論文集 CD-ROM, 論文番号 101, 2002.，4)佐藤，室野：位相情報を用いた地震動のシミュレーション法，土木学会論文集，No.675/I-55, pp.113-123, 2001.，5)Papoulis, A.(1962), The Fourier integral and its application. McGraw-Hill，7) Farnbach, J. S. (1975), The Complex Envelope in Seismic Signal Analysis, Bull. of Sesim. Soc. Am., Vol.65, No.4, 951-962

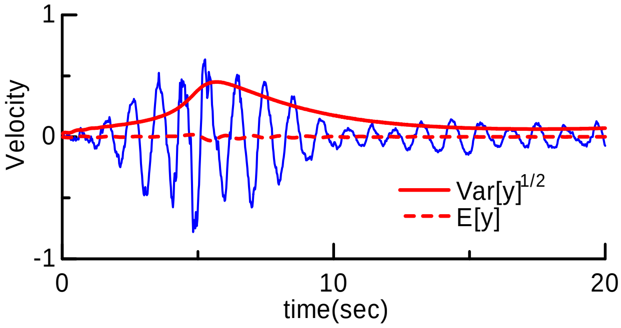

図 1　サンプル波に対する応答波形と $E[\dot{y}(t)]$，$E\left[\dot{y}(t)^2\right]$の関係

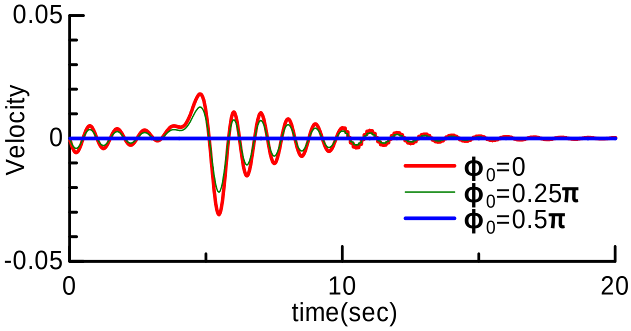

図 2　$E[\dot{y}(t)]$に対する初期位相ϕ_0の影響

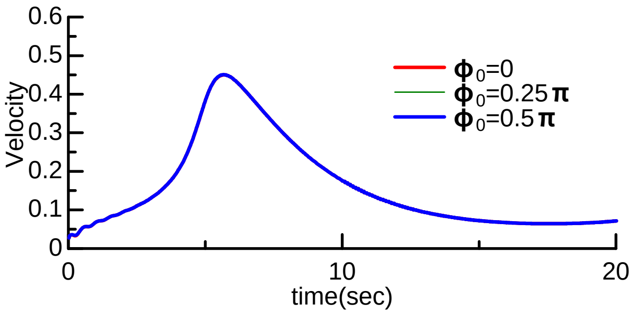

図 3　$E\left[\dot{y}(t)^2\right]$に対する初期位相$\phi_0$の影響

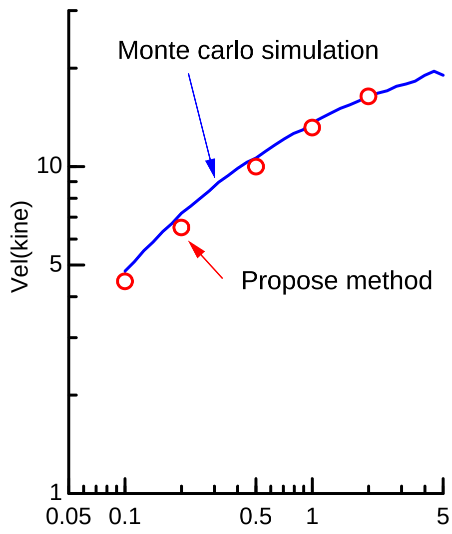

図 4　応答スペクトルの算出例