

# $k - \varepsilon$ 型 2 方程式モデルに基づく安定化有限要素法による風況解析

中央大学大学院 学生員 ○岸 昌由  
株式会社建設技術研究所 正会員 板橋 翔  
中央大学 正会員 檜山 和男

## 1. はじめに

近年、都市化に伴い森林や公園、河川等の冷熱源の減少や土地の被覆の変化、人口排熱量の増加が原因でヒートアイランド現象に代表されるような、都市固有の気候変化が顕著になり、大気汚染や粉塵公害等の問題が生じてきている。このような背景の下、数値解析により大気環境の変化を予測し捉えることは重要と考えられる。また、都市の温熱環境解析を行う際にはビルや地形等の任意複雑形状を考慮する必要がある為、任意複雑形状への適合性に優れた有限要素法は有効な手法であると考えられる。

そこで本報告では、都市温熱環境解析の基礎段階として、等温場における複雑乱流場の風況解析手法の構築を目的とし、 $k - \varepsilon$  モデルに安定化有限要素法<sup>1)</sup>を適用した。数値解析例として 2 次元角柱周り流れ解析を取り上げ、既存の実験値<sup>2)</sup>、解析値<sup>3) 4)</sup>との比較により、本手法の精度の検証を行った。また、物体境界上の角点の流速に関する境界条件について検討<sup>5)</sup>を行った。

## 2. 数値解析手法

### (1) 基礎方程式

等温場における非圧縮粘性流体を考え、乱流モデルには  $k - \varepsilon$  型 2 方程式モデルを使用する。アンサンブル平均を施された運動方程式、連続式、乱流エネルギー  $k$  の輸送方程式、式エネルギー  $\varepsilon$  散逸率の輸送方程式はそれぞれ式 (1) ~ (4) のように表される。

運動方程式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} - \left( \frac{1}{Re} + \nu_T \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

乱流エネルギー  $k$  の輸送方程式；

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - P_k + \varepsilon = 0 \quad (3)$$

エネルギー散逸率  $\varepsilon$  の輸送方程式；

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} - (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} = 0 \quad (4)$$

$$\bar{S}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad \bar{\Omega}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\text{標準 } k - \varepsilon \text{ モデル } P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$$

$$\text{修正 } k - \varepsilon \text{ モデル}^{4)} P_k = \nu_T \bar{S}_{ij} \bar{\Omega}_{ij}$$

ここで、 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{p}$  はそれぞれアンサンブル平均を施した流速、圧力を示す。また、 $k$ 、 $\varepsilon$  はそれぞれ乱流エネルギー、エネルギー散逸率を示す。 $Re$  は Reynolds 数 を示し、式 (1) ~ (4) 中の定数はそれぞれ以下の通りである。

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92$$

### (2) 安定化有限要素法

本報告では、式 (1) ~ (4) に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法<sup>1)</sup>を適用し、空間方向の離散化には P1/P1(流速・圧力 1 次) 要素を用いて補間を行い、時間方向の離散化には、2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を利用した。移流項における移流速度  $\bar{u}_i$  は 2 次精度 Adams-Bashforth 法により近似した。なお、連続式、圧力は陰的に扱っている。連立一次方程式の解法には、Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた。

### (3) 物体境界上の角点の評価<sup>5)</sup>

本報告では、物体の角点での流速を評価する際に以下の 3 通りを検討した。

Case1 角点 non-slip

Case2 幾何形状から評価する場合

境界上の接点  $j$  の接線方向を左右の辺  $a$ 、 $b$  の傾きから以下のように定義する。

$$\bar{\theta}_j = (\hat{\theta}_a + \hat{\theta}_b) / 2 \quad (5)$$

Case3 幾何形状と周辺流速から評価する場合

流速の変化に伴い接線方向も変化する。境界上接点  $j$  の  $(N+1)$  時間ステップの接線方向  $\bar{\theta}_j^{N+1}$  を求める手順は以下の通りである。

図 - 1 に示す辺  $a$ 、 $b$  上で定義される返上流速  $\hat{u}_{j,a}$ 、 $\hat{u}_{j,b}$  を、節点  $j$  とその両端の節点  $i$ 、 $k$  の接線方向流速  $\bar{u}_i$ 、 $\bar{u}_j$ 、 $\bar{u}_k$  を用いて以下のように定義する。

$$\hat{u}_{j,a}^{N+1} = \frac{1}{3} \left\{ \bar{u}_i^N \cos(\bar{\theta}_i^N - \hat{\theta}_a) \right\} + \frac{2}{3} \left\{ \bar{u}_j^N \cos(\bar{\theta}_j^N - \hat{\theta}_a) \right\} \quad (6)$$

$$\hat{u}_{j,b}^{N+1} = \frac{2}{3} \left\{ \bar{u}_j^N \cos(\bar{\theta}_j^N - \hat{\theta}_b) \right\} + \frac{1}{3} \left\{ \bar{u}_k^N \cos(\bar{\theta}_k^N - \hat{\theta}_b) \right\} \quad (7)$$

ここで、流速は辺  $a$ 、 $b$  上で線形に分布していると仮定している。続いて辺上流速  $\hat{u}_{j,a}$ 、 $\hat{u}_{j,b}$  から、以下の式で表される流速の重み  $W_{j,a}$ 、 $W_{j,b}$  を計算する。

**KeyWords：** 乱流、 $k - \varepsilon$  型 2 方程式モデル、安定化有限要素法

**連絡先：** 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kishi1@civil.chuo-u.ac.jp

$$W_{j,a}^{N+1} = \hat{u}_{j,a}^{N+1} / (|\hat{u}_{j,a}^{N+1}| + |\hat{u}_{j,b}^{N+1}|) \quad (8)$$

$$W_{j,b}^{N+1} = \hat{u}_{j,b}^{N+1} / (|\hat{u}_{j,a}^{N+1}| + |\hat{u}_{j,b}^{N+1}|) \quad (9)$$

そして、辺  $a$ 、 $b$  の傾き  $\hat{\theta}_a$ 、 $\hat{\theta}_b$  に対して  $W_{j,a}$ 、 $W_{j,b}$  により流速による重み付けをすることにより境界上節点  $j$  の接線方向  $\hat{\theta}_j$  を、以下のように評価する。

$$\bar{\theta}_j^{N+1} = W_{j,a}^{N+1} \cdot \hat{\theta}_a + W_{j,b}^{N+1} \cdot \hat{\theta}_b \quad (10)$$

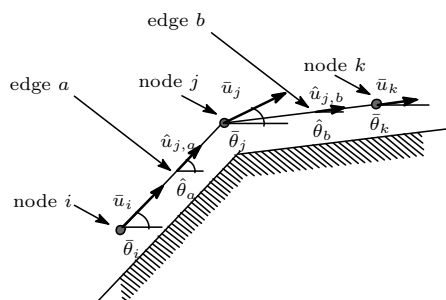


図-1 接線方向を評価する際の記号の定義

### 3. 数値解析例

#### (1) 解析条件

解析領域を図-2に、境界条件を表-1に示す。解析に用いた有限要素分割は、総節点数 9994、総要素数 19512、最小分割幅  $0.05D$  とし、 $Re = 22000$  とした。微小時間増分量  $\Delta t = 0.001$  とした。なお、解析は前項で示した Case1、Case2、Case3 の3つの角点処理について行った。

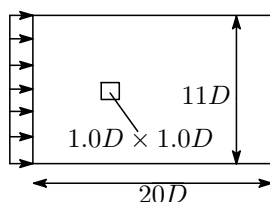


図-2 解析領域  
表-1 境界条件

|      |                                                                                  |
|------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 流入境界 | $u = u_{in} = 1.0, v = 0.0, k = 0.028$<br>$\varepsilon = 0.009k^{3/2}l, l = 1.2$ |
| 側面   | $v = 0.0, u, k, \varepsilon$ : free                                              |
| 流出面  | $u, v, k, \varepsilon$ : free                                                    |
| 角柱壁面 | 一般化対数則                                                                           |

#### (2) 解析結果

図-3に本報告による乱流エネルギー  $k$  の分布図を、図-4,5に風軸方向の流速分布を示す。乱流エネルギー  $k$  の最大値は、標準  $k-\varepsilon$  モデルの Case1 の時は 0.498、Case2 の時は 0.498、Case3 の時は 0.354、修正  $k-\varepsilon$  モデルの Case1 の時は 0.351、Case2 の時は 0.351、Case3 の時は 0.287 となっており、物体の角点の接線方向の流速を幾何形状のみでなく周辺流速も評価することにより乱流エネルギー  $k$  の低減効果が確認できる。また、図-3より乱流エネルギー  $k$  の分布が Case3 の方がより非対称的になっていることからこの事が伺える。図-4,5から Case1、Case2、Case3 とともに角柱後方の流速は解析値<sup>3) 4)</sup>と良い一致を示している事が確認できる。

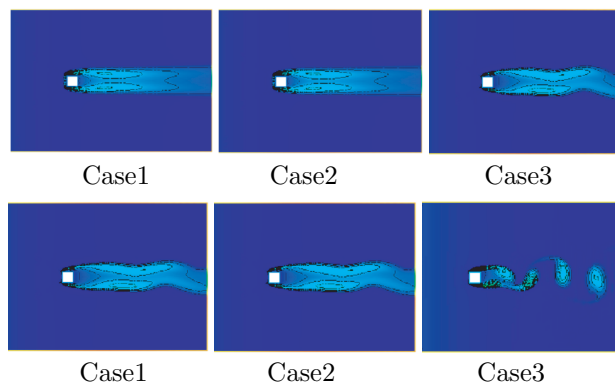


図-3 本報告による乱流エネルギー  $k$  の分布 (上図：標準  $k-\varepsilon$ ，下図：修正  $k-\varepsilon$ )

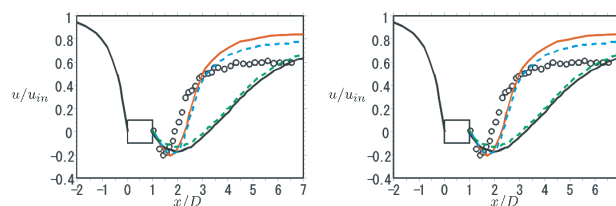


図-4 風軸方向の流速分布図 (左図：Case1，右図：Case2)

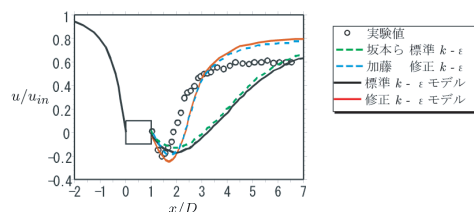


図-5 風軸方向の流速分布図 (Case3)

### 4. おわりに

本報告では等温場における安定化有限要素法により、2次元角柱周り流れ解析を行い、既存の実験値、解析値との比較により本手法の精度の検証、並びに物体境界上の角点の流速に関する境界条件について検討を行い、以下の結論を得た。

- Case1, 2, 3 を比較すると角柱後方の流速は Case3 が既存の解析値と最も良い一致を示している事が確認できた。
- 乱流エネルギー  $k$  については、Case3 において低減効果が確認できた。

今後の課題として、他の改良モデルでの検討、3次元化への拡張が挙げられる。

#### 参考文献

- 1) T.E.Tezduyar : *Advances in Applied Mechanics*, **28**, pp.1-44, 1991.
- 2) D.A.Lyn, S.Einav, W.Rodi and J.H.Park : *Journal of Fluid Mechanics*, **304** pp285-305, 1995.
- 3) 坂本成弘, 持田灯, 村上周三 : 東京大学生産技術研究所所報, 第 459 号, pp.49-56, 1994.
- 4) 加藤真志 : 名古屋大学学位論文, 1996.
- 5) 長谷部寛, 野村卓史 : 土木学会第 60 回年次学術講演会, pp.689-690, 2005.