

有限被覆法における一般化要素のLagrange未定乗数に関する研究

東北大学大学院 学生員 ○車谷 麻緒
東北大学大学院 正 員 寺田賢二郎

1. はじめに

Shi¹⁾によるManifold法を前身とする有限被覆法(Finite Cover Method; FCM)^{2,3)}は、X-FEMやGFEMと同様に、近似関数を構成する数学領域と支配方程式を満たす物理領域を独立に定義することができる。この性質に従えば、FCMにおける要素は通常の有限要素とは異なり、物理境界に沿って要素を配置しなくてよい。すなわち、要素内に外部境界や材料界面が位置すること、あるいは部分的な物理領域の存在を許容している。本研究では、このようなFCMに特有な要素を“一般化要素”^{2,3)}と呼ぶ(図-1参照)。一般化要素に境界条件を与える際は、有限要素のように節点が物理境界と一致しないため、Lagrange未定乗数法などの界面近似手法に頼らざるを得ない。本研究では、このような一般化要素におけるLagrange未定乗数の適合性について検証を行う。

2. 界面要素を用いた有限被覆法

2.1 変位の有限被覆近似

本研究では、固体力学問題を対象に一般化要素のLagrange未定乗数について検証する。FCMでは、次式のようにPU条件を満たす重み関数 w と任意の被覆関数 f との積により変位 u を近似する。

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) f_I^{[\alpha]}(x) \quad (1)$$

$$= \sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) \left(d_I^{[\alpha]} + \sum_{i=1}^m p_i(x) a_{II}^{[\alpha]} \right) \quad \text{on } \Omega \quad (2)$$

ここで、 N_M は重み関数を定義する数学被覆の総数、 p は任意関数、 α は追加自由度である。なお、上式の第2式は $a_{0I}^{[\alpha]} = d_I^{[\alpha]}$ と置き換えている。

本研究では、重み関数に双一次四辺形有限要素の形状関数(C^0 -PU)を採用することとし、被覆関数については以下に示す2通りを設定する。

- FCM_{Q4}: 被覆関数を定数関数とする低次の有限被覆近似である。この場合、双一次四辺形有限要素と同等の近似となる。
- FCM_{HO}: 被覆関数に次式で表されるような2次の関数を採用する高次の有限被覆近似である³⁾。

$$p_1(x) = x^2 - \bar{x}_I^2, \quad p_2(y) = y^2 - \bar{y}_I^2 \quad (3)$$

ここに、 $\bar{x}_I, \bar{y}_I$ は数学被覆中心点の座標である。

2.2 弱形式のつり合い方程式

不連続面 $\Gamma^{[1-2]}$ により全体領域 Ω が $\Omega^{[1]}$ と $\Omega^{[2]}$ に分断された線形弾性体の静的つり合い問題を考える。この問題の支配方程式、ひずみの適合条件式、構成式は次のように与えられる。

$$\nabla \cdot \sigma + \bar{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \{ \nabla u + (\nabla u)^T \} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\sigma = c : \varepsilon \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

ここで、 σ, ε, u はそれぞれ領域 Ω で定義されるCauchy応力、微小ひずみ、変位ベクトルであり、 $\bar{b}$ は物体力を示している。そして、次に示す変位境界での基本境界条件と、不連続面における連続適合条件を満足させる必要がある。

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (7)$$

$$t := \sigma n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (8)$$

$$u^{[1]} = u^{[2]} \quad \text{on } \Gamma^{[1-2]} \quad (9)$$

$$t^{[1]} = -t^{[2]} \quad \text{on } \Gamma^{[1-2]} \quad (10)$$

ここで、 t は外向き単位法線ベクトル n で規定される面における単位面積当たりの表面力、 $\Gamma_*^{[*]}$ は各境界条件が与えられる境界である。

FCMでは、物理領域とは独立に近似領域を構成することができるので、境界条件が与えられる $\Gamma_u, \Gamma^{[1-2]}$ に節点自由度が位置するとは限らない。本研究では、変位境界条件(7)を通常のFEMと同様の手段に任せるものとし、界面での境界条件(9), (10)に対してのみ、次式に示すLagrange未定乗数による界面要素を適用する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma d\Omega - \int_{\Gamma^{[1]}} \delta u^{[1]} \cdot \lambda d\Gamma + \int_{\Gamma^{[2]}} \delta u^{[2]} \cdot \lambda d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \delta u \cdot \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma \quad \forall \delta u \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma^{[1-2]}} \delta \lambda \cdot (u^{[1]} - u^{[2]}) d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \lambda \quad (12)$$

本研究では、変位 u とLagrange未定乗数 λ を求めるに当たり、Augmented Lagrangian法⁴⁾による反復解法を採用する。そして、一般化要素に対するLagrange未定乗数の適合性を検証するために、 C^{-1} 連続な定数による補間関数と、 C^0 連続な変位と同様の補間関数をLagrange未定乗数に適用する。

キーワード：有限被覆法，一般化要素，Lagrange未定乗数

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL: 022-795-7131, FAX: 022-795-7127, URL: <http://www.nde.civil.tohoku.ac.jp/>

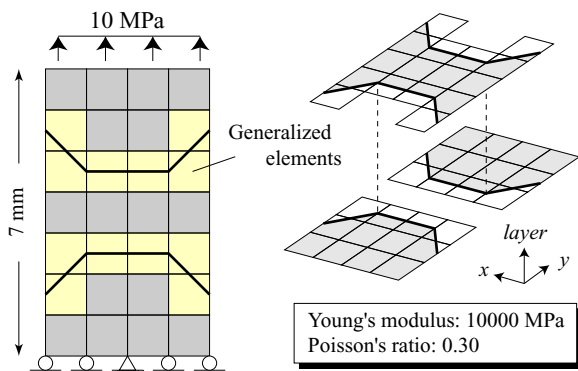


図-1 解析対象とその有限被覆モデル

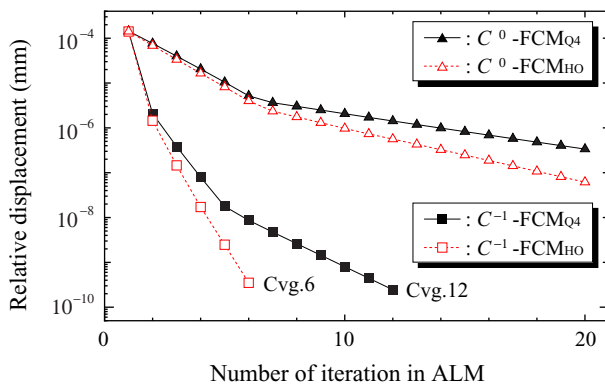


図-2 反復回数と相対変位最大値ノルムの関係

3. 適合性・精度に関する検証例題

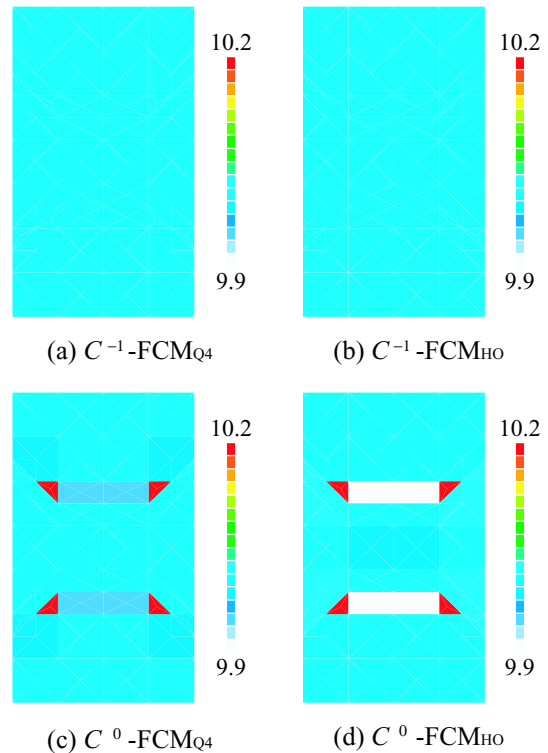
3.1 解析対象

本節では、図-1に示されるような故意に不連続面を2本配置させた1種類の材料からなる矩形構造物の平面応力問題を扱う。材料パラメータは同図に示される通りとし、 y 方向に10 MPaを与えて一軸変形状態を模擬する。解析ケースは、 C^{-1} 連続な補間関数をLagrange未定乗数に適用した C^{-1} -FCMQ4と、同様に C^{-1} -FCMHO、 C^0 -FCMQ4、 C^0 -FCMHOの合計4ケースとする。

3.2 解析結果と考察

はじめに、各4ケースについて解析を行い、ALMにおける反復回数と境界での相対変位の最大値ノルムとの関係を示したものを図-2に示す。収束判定値は 10^{-9} と仮定し、同図中のCvg.#は、収束の完了とその時の反復回数を表している。Lagrange未定乗数に定数による補間関数を適用した C^{-1} -FCMQ4と C^{-1} -FCMHOでは、変位と同様の C^0 連続な補間関数を適用した他の2ケースと比較して、優れた収束特性が得られている。一方、 C^0 -FCMQ4と C^0 -FCMHOでは、収束特性が悪く設定した20回を超過しても収束を得ることができていない。また、補間関数の連続性に関わらず、低次のFCMQ4よりも高次のFCMHOの方が、一貫して良好な収束傾向が得られている。

次に、構造内部の応答について検討する。本例題では、一軸変形問題を設定しているため、低次・高次に関わらず厳密解として y 方向垂直応力10 MPaが与えられる。これを利用して、各4ケースに対する構造内部の応答値の相違について検討する。各4ケースの y 方向垂直応力分布を

図-3 y 方向垂直応力分布 (MPa)

示した結果を図-3に示す。前の例で良好な収束特性が得られた C^{-1} -FCMQ4と C^{-1} -FCMHOでは、領域全体において厳密解である10 MPaが与えられている。これに対して、設定反復回数を超過しても収束を得ることができなかった C^0 -FCMQ4と C^0 -FCMHOでは、界面付近で不適切な応力値が検出されている。

以上の数値解析結果を総括して、FCMにおける一般化要素の物理境界にLagrange未定乗数を定義する場合、 C^{-1} 連続な定数による補間関数を適用することが望ましいことが示された。なお、本研究で得られた知見はFEMのそれとは異なることに注意が必要である⁵⁾。

4. おわりに

本研究では、FCMにおける一般化要素の物理境界にLagrange未定乗数を導入する際の補間関数に関する適合性について検討を行った。そして、一般化要素では有限要素とは異なり、 C^0 連続な変位の近似に対して、 C^{-1} 連続なLagrange未定乗数を定義することが計算効率や精度の面から望ましいという結論を得た。

参考文献

- Shi, G.H.: Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing*, Report, No.92-1, U.S. Army Research Office, 1991.
- Terada, K., Kurumatani, M.: Performance assessment of generalized elements in the finite cover method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.41, pp.111-132, 2004.
- 車谷麻緒, 寺田賢二郎: 高次有限被覆近似に基づく一般化要素の近似性能に関する一考察, 土木学会論文集, 印刷中.
- Simo, J.C., Laursen, T.A.: An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures*, Vol.42, pp.97-116, 1992.
- 車谷麻緒, 寺田賢二郎: 界面処理技術を組み込んだ有限要素メッシュの近似性能および計算負荷に関する一考察, 計算工学会講演会論文集, Vol.10, 2005. 印刷中.