要素メッシュを領域積分に利用した三次元メッシュフリー法の解析精度

清水建設技術研究所　正会員　○櫻井　英行
京都大学大学院　学生会員　大谷　佳広

1. はじめに

メッシュ分割作業の緩和の観点から，櫻井は，**図 1** に示すメッシュ間の非適合と重複を許す不整合なメッシュの集まり（CMA : Consistency-free Mesh Assembly）を利用した Element-Free Galerkin Method（EFGM）[1)]による三次元地下水浸透流解析システムを提案し，メッシュ分割作業やメッシュの修正が非常に効率よく行えることを具体的な計算例で示した[2)3)]. 解析手法に依らず解析対象の幾何形状定義は必須であり，有限要素（FE）解析のメッシュ生成にもベースとなる幾何形状定義は必要となる. メッシュ生成を困難にする要因の一つは，FE 解析用の不整合のないメッシュ生成を前提とした幾何形状定義に対する制約であり，その制約の緩和がメッシュ生成の合理化の鍵であることに着目したメッシュフリー法の応用である. メッシュの存在は，メッシュフリー解析においても非常に都合がよい. 例えば，解析対象の幾何形状定義や領域積分の数値積分セル，さらには，解析結果の画像化などに利用できる. 領域積分に関しては，メッシュフリー法で，しばしば用いられる構造格子によるバックグラウンド・セルに比べ，要素メッシュでは，メッシュが解析領域に対応しているため，積分点の解析領域に対する内外判定が不要，また，節点密度に応じたセル・サイズあるいは積分点数の変更が不要といった面で有利であり，計算効率の大きな改善が期待できる. しかしながら，これまでは，解析精度の検証が十分に行われていなかった. 本報では，FE メッシュを三次元メッシュフリー解析の領域積分に利用した場合の解析性能について論ずる. 六面体，五面体，四面体によるメッシュにおいて，積分点数を変化させた解析結果により，要素形状による解析精度の比較，解の収束性などについて考察する. また，ガウス積分だけでなく，CMA で要素体積の一部を積分するのに有効と考えられる区分的な線形積分についての検討結果も示す.

2. 数値実験

EFGM おいて，積分セルに FE メッシュを用いた数値実験の結果を示す. 以降の解析では EFGM の移動最小自乗法による関数近似[1)]において，三次元線形基底と四次スプライン重み関数を用い，基本境界条件処理にはペナルティ法を用いた[2)]. 対象とした問題は，理論解の存在する次の三次元ラプラス問題である[3)].

$$\nabla^2\phi = 0 \quad [0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c] \tag{1}$$

$$\hat{\phi} = \phi_1 \quad [x \to 0], \qquad \hat{\phi} = \phi_2 \quad [x \to a],$$
$$\hat{\phi} = 0 \quad [y \to 0, \quad b], \qquad \hat{\phi} = 0 \quad [z \to 0, \quad c] \tag{2}$$

$$a = b = c = 1.0 \tag{3}$$

$$\phi_1 = 5.0\text{，}\ \phi_2 = -5.0 \tag{4}$$

解析は，現象の対称性を考慮し，1/4 の領域のみを対象とした. また，六面体，五面体，四面体のそれぞれの要素で分割した節点配置の等しい 3 種類のメッシュを 2 セット用意した. 一つのセットは，構造格子（**図 2** 左），もう一つは，ゆがんだメッシュ（**図 2** 右）であり，両者の節点総数は等しい. 図は六面体分割の場合であるが，五面体と四面体による分割パターンは，それぞれ六面体の二分割と五分割である.

図 3 と**図 4** は，領域内の積分点総数と解析結果の誤差との関係である. 誤差は次式で計算した.

$$Error = \sqrt{\sum_{i=1}^{nodes}\frac{(\phi_i - \phi_i^{exact})^2}{(\phi_i^{exact})^2}} \Bigg/ nodes \tag{5}$$

図 3 は直交構造格子の場合のガウス積分の結果である. □は六面体を積分セルとした場合の 1^3～9^3 点の結果であり，△と▲は五面体を積分セルとし，それぞれ三角形の面内方向に 1 点と 4 点の積分点を用い，直交方向には 1～9 点の積分点を用いた結果，◇は，四面体を積分セルとした場合の 1, 4, 5 点の積分点を用いた結果である. 六面体では 2^3 の積分点で解は収束した. 五面体の場合，三角形面内に 1 点では，面外方向に 3 点で解は収束しているが，解析結果の精度は良くない. 三角形面内に 4 点の場合，面外方向に 2 点で解は収束し，六面体セルと同様の解析精度が得られた. 四面体では，5 点の結果が 4 点とほぼ同等であるが，収束の判断は難しい. なお，グレーの孤立したシンボル■，▲，◆は，商用有限要素法コードにより計算した六面体，五面体，四面体による参考結果である. 積分点数は，それぞれ六面体が 2^3, 五面体が三角形面内 3 点×面外 2 点，四面体は 1 点あり，被積分関数の次数に対しては十分と言える.

図 4 は，ゆがんだメッシュの場合の結果である. ただし，積分ためだけに，**図 3** と同じ直交構造格子を用いた結果も■で示した. 構造格子の節点配置に比べ，全体的に解析精度は劣化し，構造格子と六面体の 1 点積分は，誤差が大きく，グラフの外に出た. しかし，セル形状による解析精度の差は小さくなったと言える. 六面体では 4^3 の積分点で解は収束傾向にあり，構造格子による積分結果と同程度の精度が得られた. 五面体，四面体とも六面体の収束解までの精度は得られていないが，五面体では，三角形面内 4 点×面外方向 2 点，四面体の 4 点積分で構造格子の 3^3 点と同程度の解が得られた. これらの領域内の積分点総数も概ね同じである. 四面体の 5 点積分は良くない.

さて，本解析システムでは，CMA を積分セルとし，解析効率の向上を目指しているが， CMA では，要素が重複することを許しているため，要素体積の一部分のみを積分する場合が生じる. この場合，その要素に通常より細かい積分点を配置し，積分対象とならない部分の積分点の値をゼロにし，領域の近似精度を向上させる. しかし，この目的のためには，高次の数値積分を行うというよりは，むしろ要素内に重みの等しい，できるだけ多くの積分点をむらなく配置することが望ましいと考えられる. ましてや，三角形の 4 点や四面体の 5 点のガ

キーワード： consistency-free mesh assembly (CMA)，メッシュフリー，数値積分，ガウス積分，element-free Galerkin
連絡先：〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設（株）技術研究所原子力グループ TEL(03)3820-8419, FAX(03)3820-5959

ウス積分[4)]のように重心点で重みが負になる積分は適当ではない. そこで, ガウス積分ではなく, 各要素内に均等に重みが割り当てられるように積分点を配置した場合, すなわち, 区分的に線形関数近似を行った場合の解析精度の検討を行った.

図５は, ゆがんだメッシュの場合のガウス積分と区分線形積分の結果の比較である. 六面体セルの場合では, 6^3 以上の積分点で構造格子積分と同様の結果が得られた. 五面体を積分セルとした場合では, 三角形面内が 4 点積分のときには, 区分線形積分により, むしろ解析精度が改善された. ただ, 三角形面内を 9 点積分としても, 解析精度の改善は見られず, 4 点の場合と概ね同じになった. 四面体を積分セルとした場合では, 12 点(ただし, 全点で重みは均等ではない)と 16 点の区分線形積分により, 若干の精度の改善が見られた.

3. おわりに

FE メッシュを三次元メッシュフリー解析の積分セルに利用した場合の解析精度について検討した. 有限要素解析解と比較しても任意形状の六面体, 五面体, 四面体を領域積分に利用した EFGM の結果は良好であり, 十分実用的であると判断される. したがって, よく用いられる構造格子のバックグラウンド・セルではなく, 解析領域に一致した FE メッシュの積極的な利用により, 次の二つの処理が不要となり, 解析効率を改善できるものと予想される.

・ 積分点の解析領域に対する内外判定
・ 節点密度に応じたセル・サイズあるいは積分点数の変更

また, 要素の重複を許す CMA を入力データとする場合の合理的な積分方法として区分線形積分を適用したときの解析精度についても検討した. 要素が重複する場合には, ある要素内に積分領域とならない部分が生ずる. そのような要素を精度良く積分するためには, 高次積分を行うよりは, 重みの等しいできるだけ多くの積分点を要素内にむらなく配置する方が合理的であると考えられる. 数値実験の結果, そのような多くの積分点を配置した区分線形積分を実施しても良好な結果が得られた. 要素の重複処理において, 有効であると考えられる. しかし, 本報告での結果は, 数値実験の一例に過ぎない. 各要素での適切な積分点数については, 対象とする問題や近似関数の台の大きさの設定によっても変わってくるものと考えられる.

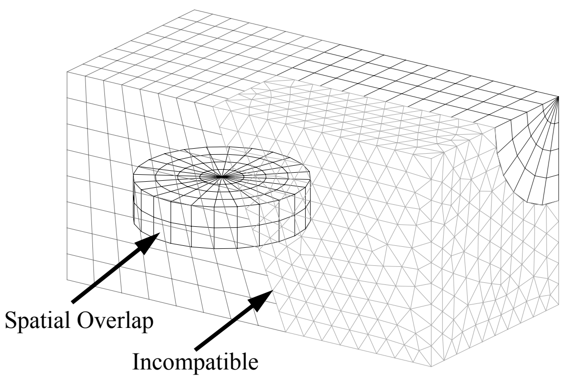

図１ メッシュ間の非適合と重複を許す CMA

引用文献

1) Belytschko, T. et al.: Element-free Galerkin methods, *I. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 229-256, 1994.
2) 櫻井英行: Element-free Galerkin 法を応用した新しい三次元地下水浸透流解析システム, 土木学会論文集, 720/Ⅶ-25, 63-75, 2002.
3) 櫻井英行: メッシュ生成の問題に供するメッシュフリー法と不整合メッシュの応用, 日本機械学会論文集 A, 70-691, 346-353, 2004.
4) Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L.: The finite element method (5th edn.), v.1, Butterworth-Heinemann, 2000.

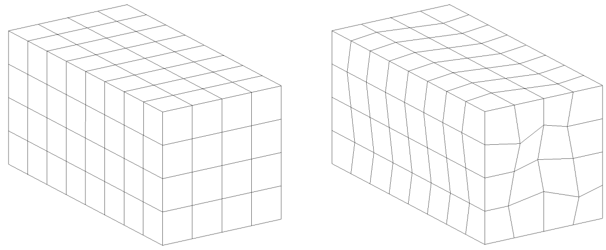

図２ 解析メッシュ(左:メッシュ 1, 右:メッシュ 2)

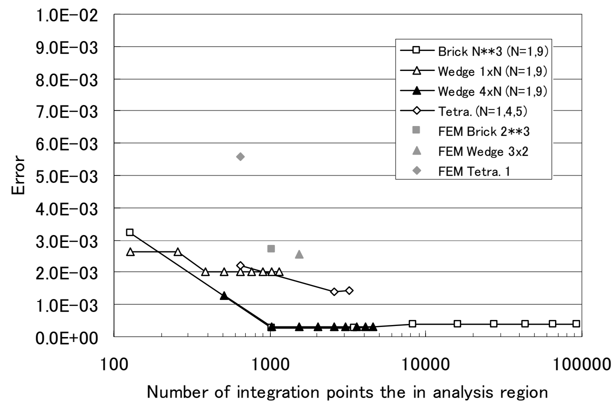

図3 メッシュ1のガウス積分による解析誤差

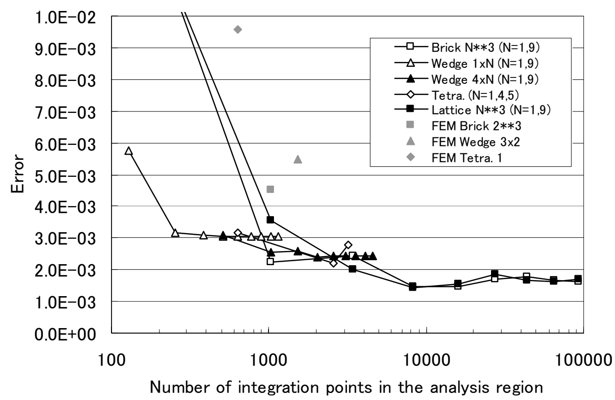

図4 メッシュ2のガウス積分による解析誤差

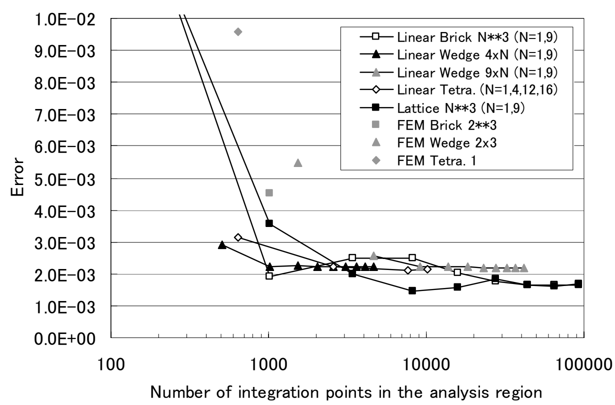

図5 メッシュ2の区分線形積分による解析誤差