

## 三次元 Delaunay 分割法による形状生成と要素の細分割

中央大学大学院 学生員 ○大川 博史  
 日本工営株式会社 正会員 浜田 秀敬  
 中央大学 正会員 檜山 和男  
 岡山大学 正会員 谷口 健男

### 1. はじめに

三次元任意形状に対する要素分割法として Delaunay 分割法<sup>1)</sup>は有効な方法である。しかし、この方法は、1) 非凸領域を表現するために要素分割後に領域内外判定の特別な処理が必要であること、2) 要素分割が節点の配置に依存するため与えた節点群では形状を正確に表現できない場合があることの2つの問題がある。

本研究では、三次元 Delaunay 分割法の上記の問題点を解決し自動要素生成手法を構築した。本手法により、いくつかのモデルを用いて、特別な処理を行うことなく複雑な領域形状を正確に表現できることを示した。

### 2. Delaunay 分割法による四面体要素生成

図-1はDelaunay分割法に基づく本手法のフローチャートであり、以下に各項目について説明する。

#### (1) 非凸領域の形状生成

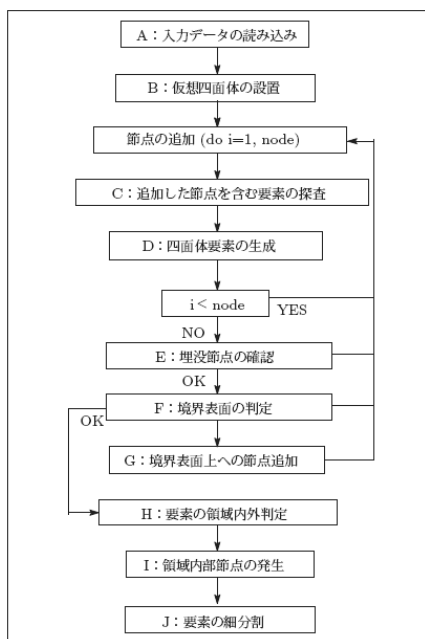


図-1 Delaunay 分割法のフローチャート

#### a) 三次元形状の入力データおよび仮想四面体について (フロー A,B)

三次元 Delaunay 分割法の入力データとして、領域表面を三角形要素で分割した表面三角形を用いる。また、アルゴリズムを統一化させるため、全ての節点を包括する仮想の四面体を設置する<sup>1)</sup>。本研究では、図-2に示すように5つの仮想四面体から成る立方体を作成し、一辺の長さが1の立方体に全ての節点が含まれるように基準化した上で、節点を追加

していく。この操作により、追加される節点は必ず仮想四面体内部となり、常に同じアルゴリズムで要素分割を行うことができる。

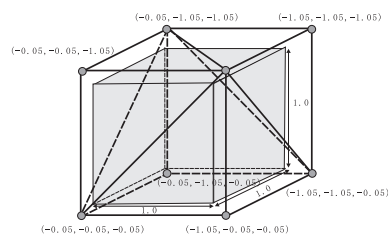


図-2 仮想四面体の設置

#### b) 四面体要素の生成について (フロー C,D)

Delaunay 分割では逐次節点を追加し、図-3に示すように外接球内に追加した節点を含む要素 A,B,C,D,E,F(以降、修正要素と呼ぶ)を抽出し、それらの要素を取り除くことによりできた多面体 a-b-c-d-e-f-g-h の頂点と新しく追加した節点 p を結ぶことにより新たに四面体要素 A,B,C,D,E,F,G,H を生成する。この要素再分割により、各四面体要素の外接球には他の節点が含まれないよう四面体要素が生成される。また、四面体要素が修正要素の場合、四面体要素は負の体積となるが、新たに修正要素として四面体要素を加えることで負の体積を持つ要素を制御している。

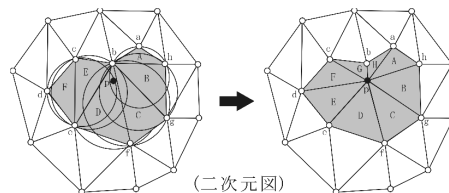


図-3 四面体要素の再分割

#### c) 埋没節点の確認 (フロー E)

三次元 Delaunay 分割には、四面体の体積計算、追加した節点を含む要素の探索、外接球内に追加した節点を含む四面体要素の探索の三つの実数計算があり、この実数計算による数値誤差が原因となり節点が埋没してしまうことがある。節点の埋没とは、Delaunay 分割後の四面体要素の頂点に用いられていない節点のことであり、境界表面が生成されていないことを意味する。本研究では、埋没節点が発生した際、もう一度分割領域内に追加することで、埋没節点を防いでいる。

#### d) 境界表面の判定 (フロー F)

生成された四面体要素群によって境界表面が生成されているかを判定するため、入力データである表面三角形を利用し、表面三角形と同じ3節点から構成されている四面体要素の表面の三角形を探索する。この時、三次元 Delaunay 分割

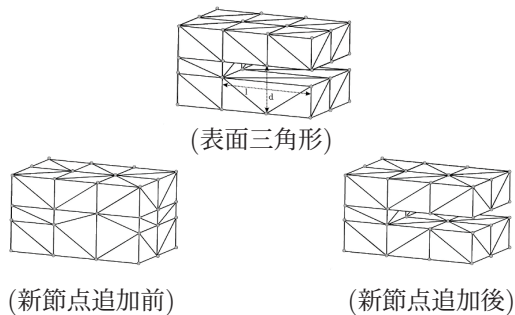
**KeyWords:** Delaunay 分割法, 要素生成法

**連絡先:** 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: okawa@civil.chuo-u.ac.jp

法により生成される要素は節点位置に依存することから、表面三角形と要素分割後の境界表面の要素－節点関係が異なる場合がある。しかし、これらの表面が同一平面上である場合は境界表面が生成されていると判断し、本研究では、表面三角形を局所変換<sup>2)</sup>することにより、境界表面が生成されているかを判定した。

#### e) 境界表面生成のための節点追加 (フロー G)

図－4 に示す表面三角形のように、辺長  $l$  が  $d$  に比べ長い場合、Delaunay 分割後の四面体要素は境界表面を貫いてしまう。本研究はこのような問題に対しても対応可能とするため、生成されなかった表面三角形を判定し、境界表面上に新しく節点を追加することで境界を貫く要素を修正し、境界表面を表現した。図－4 のように境界表面上の辺が生成されていない場合、その辺の midpoint に節点を追加することで、生成されなかった辺を表現した。



図－4 境界表面辺上への節点追加による形状表現

#### f) 領域外の要素の削除 (フロー H)

Delaunay 分割法により非凸領域を要素生成する場合には、要素分割後に領域内外判定を行い、領域外の要素を全て削除することで、任意形状を表現する必要がある。本研究では領域判定点を用いて領域の内外判定を行った。

三次元 Delaunay 分割後、予め領域内の任意の場所に設置した領域判定点を含む四面体要素を探索し、内外判定が終了した時点で、モデル領域内の要素と判定されている四面体要素群を取り出すことにより、三次元任意形状を表現することが可能となる。

#### (2) 領域内部節点の発生と四面体要素の細分割

##### a) 領域内部節点の発生 (フロー I)

境界表面上の節点のみで要素分割を行う場合、扁平な四面体要素が多数生成される。これらは解析用のメッシュとして使用する際に、誤差の増大や数値的不安定の原因となる。そこで、領域内部に新節点を発生させることにより解析に適した要素の大きさに疎密化していく。本研究では、任意の間隔に設定した節点を領域内部に発生させ、その節点について要素サイズ関数を導入して要素幅を算出する。そして、その要素幅に相応しい節点がない場合、新たに節点を追加することとした<sup>3)</sup>。

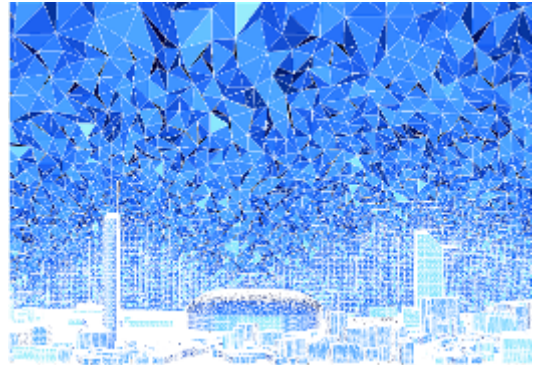
##### b) 要素の細分割 (フロー J)

数値解析に適用可能な有限要素メッシュを生成するため、発生した領域内部節点を基に Delaunay 分割により四面体要素の細分割を行う。このとき、初期メッシュの境界形状を維持した状態で要素分割することが必要となる。このため、

要素の細分割の際は、修正要素を削除した際にできる多面体が凸領域になるまで、修正要素をリストから外し、残った修正要素からなる多面体の頂点と追加した節点を結ぶことにより四面体要素を再分割していく。これにより初期メッシュの形状を保った状態で要素分割を行うことができる。

### 3. 要素分割例

本手法を用いて生成した有限要素分割を示す。図－5 に東京都文京区周辺の都市モデルに適用した要素分割結果を示す。図より、解析モデル領域が正確に表現されていることが確認できる。また、要素サイズ関数を用いた領域内部節点の発生により、疎密を考慮した要素分割を行うことで、構造物に近い箇所ほど、要素が細かくなっていることがわかる。



総節点数 = 1,399,657, 総要素数 = 7,873,891

図－5 都市モデルの要素分割図

### 4. 結論および今後の課題

本研究では、三次元 Delaunay 分割法の問題点を解決し、非凸領域に対しても四面体要素分割が行える自動要素生成手法を構築した。本手法の有効性を示すために分割例を挙げ、以下の結論を得た。

- 複雑領域を表現するための処理として、表面三角形を用いた四面体要素の領域内外判定手法を提案し、任意形状を表現することを可能とした。
- メッシュ生成の信頼性を向上させるため、与えられた節点群でモデル領域が表現されない場合に対しても、領域を貫く要素を自動で判定し修正する機能を加えた。
- 高品質の数値解析を実現するために、領域内部節点の発生手法の導入を行うことにより、要素の疎密化を可能とした。

以上より、本手法は三次元任意形状に対する自動要素生成法として、高性能な手法であると言える。

今後の課題として、より少ない入力データにより、複雑形状を有する分割領域を正確に表現すること、要素分割の高速化などがあげられる。

#### 参考文献

- 1) 谷口健男, 太田親: 三次元凸体の四面体有限要素分割, 土木学会論文集, No.432/I-16, pp.137-144, 1991.
- 2) 谷口健男: FEM のための要素自動分割, 森北出版 (株), 1992.
- 3) 浜田秀敬, 桜井紘己, 高瀬慎介, 樫山和男, 谷口健男: CAD/GIS を用いた自動要素生成法による三次元都市モデリング, 日本計算工学会論文集, Vol.8, pp845-848, 2003.