# 三角形要素を用いたEuler型有限要素法による固体大変形解析

中央大学大学院　学生員　○山田　豊
さいたま市役所　正生員　金子　恭久
中央大学　正会員　樫山　和男
広島大学　正会員　岡澤　重信

## 1. はじめに

従来，有限要素法による固体解析では，物質の変形に追従して要素形状が刻々と変化するLagrange型解法により解析される．しかしながら，物体の変形が極めて大きい問題では，計算要素が潰れ，計算が破綻するといったことが度々生じる．それに対して，Euler型解法[1)]は，空間に固定された観測点に注目するため，計算要素が歪むことがなく任意の大変形の取扱いが可能となる．Euler型解法は，移流スキームにMUSCL法，及びSUPG法を適用した構造格子に基づく数値解析手法[2),3)]が提案されているが，複雑形状に対しては，非構造格子に基づく手法が有効であると考えられる．

そこで本論文では，Euler型解法を複雑形状へ適用するため，非構造格子である三角形要素を用いた固体の大変形解析手法を構築する．なお，移流スキームには，SUPG法とCIVA法を採用した．数値解析例として，弾塑性材料の衝突解析を取上げ，Lagrange型解法との比較のもとで本手法の有効性を検討する．

## 2. Euler型解法

### (1) 支配方程式

Euler記述による支配方程式は，次式で示される．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = f \tag{1}$$

ここで，式(1)に対して，operator split法を用いて次式のように分割する[1)]．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = f \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{x}} = 0 \tag{3}$$

式(2)は，外力項を含んだLagrangeステップ, 式(3)は，移流項を含んだEulerステップにおける方程式である．このとき式(3)における$*$印は，Lagrangeステップ後の値を意味し，式(3)において，応力，ひずみ等のLagrangeステップ後の解を固定の計算要素に投影させている．

### (2) Lagrangeステップ

Lagrangeステップにおいては，通常の動的陽解法をそのまま用いる[4)]．空間方向に離散化された弾塑性体に対する動的な平衡方程式は，次式で示される．

$$\overline{M}\dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{F}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{int}} = \mathbf{F}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{ext}} \tag{4}$$

ここで$\overline{M}$は，対角化された集中質量行列，$\mathbf{F}_{\mathbf{int}}$は内力ベクトル，$\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$は外力ベクトルを表わす．また上添字$n$は，現時刻ステップであることを意味する．

### (3) Eulerステップ

自由境界面を表現するために，計算要素内の界面関数を移流させるVOF(Volume of Fluid)法を適用する．

#### a) SUPG法

式（3）に対してSUPG法に基づく安定化有限要素法を適用すると，以下の弱形式が得られる．

$$\int_{\Omega} \Phi^* \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi\right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_\phi \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi^* \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi\right) d\Omega = 0 \tag{5}$$

なお，安定化パラメータ$\tau_\phi$，及び要素サイズ$he$は，文献[5)]を参照されたい．式（5）に対して，空間方向に離散化を施すと以下の有限要素方程式が導ける．

$$(M + M_\delta)\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (N(u) + N_\delta(u))\Phi = 0 \tag{6}$$

ここで$M, N$は，係数行列であり，下添字$\delta$は，SUPG項を意味する．また時間方向の離散化には．Crank-Nicolson法を適用し，連立1次方程式の解法にはElement-by-Element Bi-CGSTAB法を用いた．

#### b) CIVA法

CIVA法は，移流方程式の厳密解が式(7)になることから，面積座標を用いて，上流側の格子内に張った3次補間曲面により解を求める手法である[6)]．上流側の要素に対する3次補間曲面は，面積座標（$L_1, L_2, L_3$）を用いて式(8)のように表現できる．

$$\phi^{n+1}(x,t) = \phi^n(x - u\Delta t, t - \Delta t) \tag{7}$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=-1}^{3} \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1 j\neq k}^{3} \beta_{jk}(L_j^2 L_k + cL_1L_2L_3) \tag{8}$$

ここで，$d$は，1次補間と3次補間の調節パラメータで，$d = 0$のとき1次，$d = 1$のとき3次補間となる．なお$c$は，既往の研究で最適値として示された$c = 1/2$を用いた．係数$\alpha, \beta$は，上流側の三角形要素のスカラー量$\phi$とその空間微係数により決定され，次式のようになる．

$$\alpha_i = \phi_i \tag{9}$$

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (x_k - x_j)\phi_j^x + (y_k - y_j)\phi_j^y \tag{10}$$

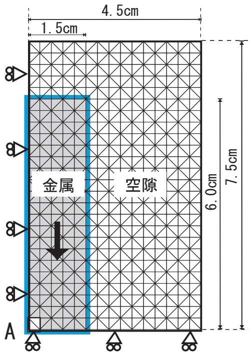
ここで，$\phi^x, \phi^y$は，スカラー量$\phi$に関する$x, y$方向の微係数である．

**KeyWords：**　Euler型有限要素法，移流方程式，安定化有限要素法
**連絡先：**　〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27　E-mail: yutaka@civil.chuo-u.ac.jp

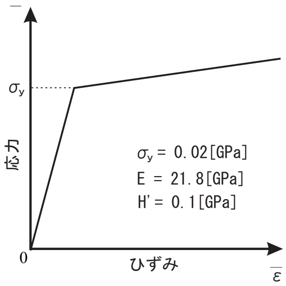
## 3.　数値解析例

### (1)　解析条件

数値解析例として，弾塑性材料の衝突解析を取上げる．数値解析モデルは，図－1に示すように鋼材に対して鉛直下向きに初期速度 300(m/sec) 与え，解析領域内において，材料と空隙が混在しているものとする．また材料特性は，図－2に示されるようにバイリニア硬化型の $J_2$ 流れ則を使用し，ポアソン比は 0.28，密度は 1710(kg/$m^3$) を仮定する．

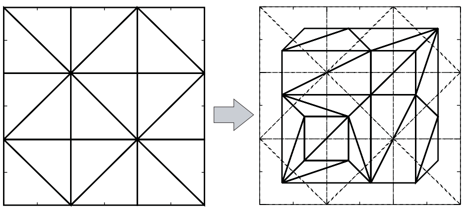



図－1　数値解析モデル




図－2　材料特性

応力，相当塑性ひずみは三角形の重心点で与えられるのに対し，移流方程式は節点で諸量を評価する．本論文では，整合性を保つために Delauny 分割を用いて，図－3のように，三角形の重心点によって新たに要素分割を構築する．



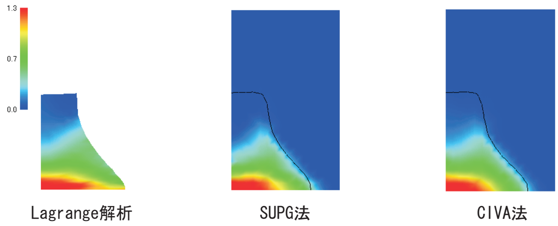
図－3　有限要素分割及び，新たに構築した要素分割

### (2)　解析結果

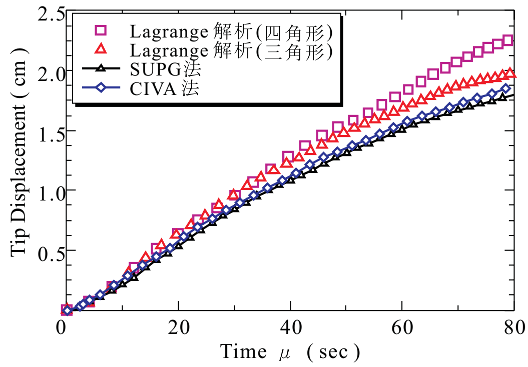
図－4に 80$\mu$(sec) 後の Lagrange 解析，SUPG 法，CIVA 法による変形形状，及び相当塑性ひずみ分布を示す．また，図－5に棒の先端変位の時刻暦を示し，表－1は材料の左隅 A における相当塑性歪み値であり，図－1中の白抜きされた二つの要素の平均を取ったものである．これらの結果より SUPG 法と CIVA 法は，Lagrange 解析と同等の変形形状，及び相当塑性ひずみ分布を示していることが確認できる．また，先端変位の時刻暦においては両手法とも Lagrange 解析値と比較して若干小さく評価されている．また，左隅 A における相当塑性ひずみ値は，CIVA 法が三角形，四角形要素の Lagrange 解析値に近い値を示しているのに対し，SUPG 法は過大に評価される結果となった．

## 4.　おわりに

本論文では，Euler 型解法を複雑な形状モデルへ適用するため，三角形要素を用いた固体の大変形解析手法を構築した．数値解析例を通じて，本手法の有効性を検討し，以下の結論を得た．




図－4　80$\mu$(sec) 後の変形形状及び，相当塑性ひずみ分布




図－5　棒の先端変位の時刻暦

表－1　左隅 A における相当塑性ひずみ値

| Lagrange 解析 (四角形) | Lagrange 解析 (三角形) | SUPG 法 (三角形) | CIVA 法 (三角形) |
|---|---|---|---|
| 1.56509 | 1.60390 | 1.74978 | 1.575355 |

- SUPG 法，CIVA 法の変形形状における顕著な差異は，見られなかった．先端変位においては，両手法ともに Lagrange 解析値に比べて若干小さく評価されることが確認された．
- 左隅 A における相当塑性ひずみ値は，SUPG 法が Lagrange 解析値よりも過大な値を示したのに対し，CIVA 法は三角形，四角形要素それぞれの Lagrange 解析値に近い値を示した．これらの結果より，CIVA 法を用いた本手法の有効性が確認された．

今後の課題として，本手法の複雑形状を有する解析への適用及び，更なる精度向上，三次元化などが挙げられる．

### 参考文献

1) Benson,D.J. : Computatinal Methods in Lagrange and Eulerian Hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*,99,pp.235-394,1992.
2) 岡澤重信：オイラー型ハイドロコードにおける移流スキームの考察，第 53 回理論応用力学論文集，pp493-494，2004.
3) 金子恭久，樫山和男，岡澤重信：Euler 型有限要素法による固体の大変形解析，第 54 回理論応用力学論文集，pp.599-600，2005
4) 岡澤重信，河口篤志，藤久保昌彦：各種メッシュ制御における動的陽解法，応用力学論文集，Vol.6，pp151-158，2003.
5) Tezduyar,T.E.：Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advanced in Applied Mechanics,28,pp1-44,1991.
6) 田中伸厚：数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発，日本機会学会論文集（B 編），64 巻 620 号 pp103-110，1998.