剛体介在物の周期境界値問題における高速多重極法と均質化法への応用

京都大学大学院工学研究科　学生会員　○法崎健二
京都大学学術情報メディアセンター　正会員　西村直志

1. はじめに

近年、微視構造を有する物質の巨視的な力学特性を導く理論として、均質化法が注目されている。均質化法においては、微視構造における周期境界値問題を解く必要が生じる。本論文では、微視構造として複数の剛体介在物を含む複合材料を考え、高速多重極法を用いた境界積分方程式法に周期境界条件を課すことにより、微視構造を反映した巨視的な弾性定数を導出する。

2. 問題の定式化および境界積分方程式法

2 次元 Laplace 方程式における剛体介在物の周期境界値問題は、以下のように表される。

基礎方程式　$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$　(1)

剛体での境界条件　$u = C \quad (\text{on } S)$　(2)

釣合条件　$\displaystyle\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$　(3)

周期境界条件　$u(\boldsymbol{x}^1) = u(\boldsymbol{x}^2) \quad (\text{on } \Gamma)$　(4)

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x}^1)}{\partial n} = -\frac{\partial u(\boldsymbol{x}^2)}{\partial n} \quad (\text{on } \Gamma) \tag{5}$$

ここに、Ω は介在物を除いたユニットセル、Γ は Ω の外側の境界, S は剛体の境界、$\boldsymbol{n}$は境界について外向き単位法線ベクトル 、$\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ は Γ 上で互いに反対側の点、C は定在 (介在物ごとに異なる) である。

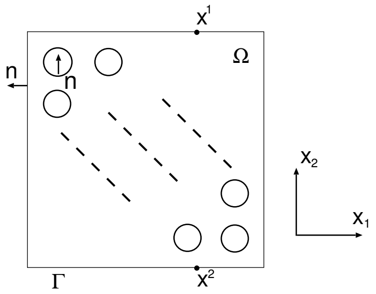

図 1: 2 次元剛体介在物の周期境界値条件

無限領域の場合、$z = x_1 + ix_2$, $\zeta = y_1 + iy_2$ とおくと、解の積分表現は次のようになる。

$$u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\int_S \log(z-\zeta)\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n}\right] dS_\zeta \tag{6}$$

ここに $i = \sqrt{-1}$ である。

周期境界条件を満たす解を得るため、式 (6) を周期化することを考える。周期境界条件はユニットセルと同じ構造をしたセルが無限に並んでいるものとして与える。

キーワード:境界要素法，多重極法，均質化法，周期境界値問題
連絡先:〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 京都大学学術情報メディアセンターメディアコンピューティング分野　TEL: 075-753-7457　FAX: 075-753-7450

周期化にあたって、次の疑周期関数を用いる。

$$\log\sigma(z) = \log z + \sum_{w\in N}\left[\log(1-\frac{z}{w}) + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}\right] \tag{7}$$

ここに、N は

$$N = \{\omega = m + in | m, n : 整数, \omega \neq 0\} \tag{8}$$

なる複素数の集合である。$\log\sigma(z)$ は周期関数ではなく

$$\log\sigma(z+1) = \log\sigma(z) + \pi(z+\frac{1}{2}) \pm \pi i \tag{9}$$

$$\log\sigma(z+i) = \log\sigma(z) - \pi i(z+\frac{i}{2}) \pm \pi i \tag{10}$$

の性質を有する [1)]。したがって解表現は、

$$u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\Big[\int_S \log\sigma(z-\zeta)\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n}dS_\zeta + \pi z\int_S \bar{\zeta}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n}dS_\zeta\Big] \tag{11}$$

となる。ここに $\bar{\zeta}$ は ζ の共役複素数である。

3. 周期境界値問題における高速多重極境界積分方程式法

多重極法の周期境界値問題への適用は以下のとおりである。まずレベル 0 のセル (=ユニットセル) まで多重極モーメントを求める。次に、レベル 0 でユニットセルに隣接していないセルからの式 (11) への寄与は、ユニットセルの中心に関する局所展開係数として評価し、その後、ユニットセルとそれに隣接する 8 つのセルに対して通常の downward pass を実行する。周期境界値問題を解くために、前節において求めた周期化した解表現 (11) の $\log\sigma$ の $\sum_{w\in N}$ に関する項と、z の線形項を補正する。集合 N', N'' を

$$N'' = \{\omega = m + in | m, n : -1, 0, 1, \omega \neq 0\} \tag{12}$$

$$N' = N \setminus N'' \tag{13}$$

で定義し、まず N' からの寄与の計算法について述べる。記号

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!} \quad \text{for} \quad k \geq 0 \tag{14}$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k} \quad \text{for} \quad k \geq 1, \quad O_0(z) = -\log z \tag{15}$$

を導入し、$\log\sigma$ 関数の $\sum_{w\in N'}$ に関する項 ($\log\sigma^p$ とする) の多重極展開を行うと次のようになる。

$$-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\int_S \log\sigma^p(z-\zeta)\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n}dS_\zeta\right] = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{w\in N'}\sum_{n=\max\{3,l\}}^{\infty}(-1)^{n-l}O_n(w)M_{n-l}(0)\right] I_l(z) \tag{16}$$

以上の結果に線形項の寄与を加えることにより、レベル 0 の局所展開係数は次のように計算される。

$$L_l(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=\max\{3,l\}}^{\infty}(-1)^{n-l}\{\sum_{w\in N'}O_n(w)\}M_{n-l}(0)-\frac{1}{2}\delta_{l1}\overline{M_1}(0) \quad (17)$$

式 (17) の評価には $\sum_{w\in N'} O_n(w)$ の値が $n\geq 3$ に対して必要となるが、この和は絶対収束するため、数学的厳密さを損なわずに N' からの寄与を計算できたことになる。

4. 均質化法

微視的なスケールにおいて、複数の剛体を有する物質について考える。均質化法の理論より、微視構造を考慮した巨視的な弾性定数 A_{ij} は

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{|Y|}\int_S t_i y_j dS \quad (18)$$

となる [2)]。ここに $t_i = \frac{\partial \chi^i}{\partial n} + n_i$ である。以上より、巨視的な弾性定数を評価するためには、周期境界条件のもとで χ^i を求めなければならず、そのために前述した周期境界条件における高速多重極法を用いる事ができる。

5. 問題設定

一辺の長さが 1 の正方形ユニットセルに、半径 r の円形、又は長軸 $2a$、短軸 $2b$ の楕円形の剛体介在物が x_1 方向に ng_x、x_2 方向に ng_y 個並んだ場合を考える。なお、剛体一つ当りの要素数を n とする。

数値計算を行った条件を表 1, 表 2 に示す。ここでは円 5、楕円 3、楕円 4 では介在物をランダムに配置し、他では規則的な配置 (格子状) を与えた。

表 1: 各問題の条件 (円)

case	n	r	ng_x	ng_y	剛体の個数
円 1	100	0.4	1	1	1
円 2	100	0.05	5	5	25
円 3	100	0.08	5	5	25
円 4	100	0.018	25	25	625
円 5	100	0.01	-	-	1000

表 2: 各問題の条件（楕円)

case	n	a	b	ng_x	ng_y	個数
楕円 1	100	0.08	0.03	5	5	25
楕円 2	100	0.018	0.03	5	5	25
楕円 3	100	0.06	0.02	-	-	109
楕円 4	100	0.02	0.005	-	-	1103

例として図 2 に楕円 3 の場合の剛体配置図を示す。

各条件において、均質化法の理論から導出された巨視的な弾性定数を表 3 に表す。

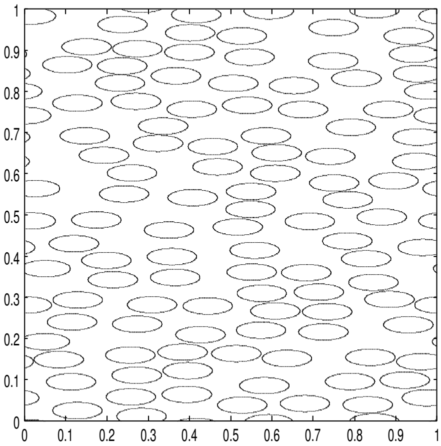

図 2: 楕円 3

表 3: 各条件において求めた巨視的な弾性定数

case	E_{11}	E_{12}	E_{22}
円 1	3.1008	-1.1403D-7	3.1008
円 2	1.4884	9.1779D-10	1.4884
円 3	3.1009	1.0382D-4	3.1009
円 4	5.0732	-5.0067D-3	5.0736
円 5	1.9929	-1.7403D-3	1.9784
楕円 1	1.8382	4.0636D-2	1.4487
楕円 2	2.3359	2.6488D-2	1.4521
楕円 3	4.1233	-1.0327D-2	2.1104
楕円 4	4.0677	-2.1964D-4	1.7559

6. 結論

本論文では、剛体介在物の周期境界値問題に多重極法を用い、精度良く解を求めることができた。また均質化法の理論により微視構造を考慮した巨視的な弾性定数を求める事が可能となった。さらに今回は、ユニットセルの境界をまたぐ剛体を配置したため、ユニットセルが無限に並んだ周期構造を仮定した際でもセルの境界付近に「弱層」は生じないと考えられる。これらのことから、本論文の手法では微視的な構造を効果的に巨視的な物理特性に生かすことできたと言える。今後の課題としては並列化による計算の高速化や、静弾性問題などにも応用していくことが考えられる。

参考文献

(1) 森口繁一ら (1977), 岩波数学公式 3, 岩波書店.
(2) J.L.Lions (1980), Remarks on Some Asymptotic Problems in Composite and in Perforated Materials, Variational Methods in the Mechanics of Solids, pp.3-20, Pergamon.