拡散型方程式の時間領域境界要素解析への離散作用素積分法の応用

福井大学大学院　学生会員　○　浦　勝一
福井大学大学院　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

本研究では拡張された拡散方程式 (拡散型方程式) の時間領域境界要素法の定式化と簡単な計算モデルを用いた解析を行う。ここで扱う拡散型方程式は、場に拡散物質の発生と消滅が存在し、かつ、その強度が場のポテンシャルに比例する場合である。通常の拡散方程式では時間領域の境界要素解析がなされているが、拡散型方程式の場合には時間域の基本解を閉じた形で表現することが困難であり、境界要素解析を行う際の問題となる。しかし、Lubich による離散作用素積分法 [1] を使って構成される時間領域境界要素法 [2] においては、基本解の Laplace 変換だけを利用して解析を進めることができる。ここでは、離散作用素積分法を拡散型方程式に適用して、時間領域境界要素法を定式化する。

2　拡散型方程式の境界積分方程式

拡散方程式の拡張である拡散型方程式

$$\left(\nabla^2 - \alpha^2 + \beta^2\right) u = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

について考える。ここに、$u(\boldsymbol{x},t)$ はポテンシャルである。また、α、β、γ は、一般には場所の関数であるが、ここでは定数であると仮定する。これらの定数は、α、$\beta \sim O(1)$、$\gamma \sim O(10^2)$ 程度の値であることを想定している。

方程式 (1) の初期値境界値問題を解くことを考える。境界 ∂B 上において、境界値 $u(\boldsymbol{x},t)$ または $s(\boldsymbol{x},t) = \partial u(\boldsymbol{x},t)/\partial n$ のどちらかが与えられているとする。この問題の解は、境界値の繰り込み積の形で

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t) =& \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},t) * s(\boldsymbol{y},t)\, dS_y \\ &- \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},t) * u(\boldsymbol{y},t)\, dS_y \end{aligned} \tag{2}$$

と表現することができる。ここに、$C(\boldsymbol{x})$ は自由項であり、$G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},t)$、$S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},t)$ は基本解および二重層核である。また、上式においては、初期値 $u(\boldsymbol{x},0) = 0$ を仮定した。(2) は、$\boldsymbol{x}$ を境界に近付けるとき、未知の境界値に関する境界積分方程式となる。

ここで基本解の導出を行うが、時間域の基本解を得るためには逆 Laplace 変換が必要であり、拡散型方程式ではこの操作が困難である。そこで次に述べる離散作用素積分法を適用し、これを回避する。

3　離散作用素積分法

Lubich[1] は、繰り込み積分

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \qquad (x \geq 0) \tag{3}$$

の離散化繰り込み積

$$\sum_{j=0}^{N} \omega_j(\Delta t) g(x - j\Delta t) \tag{4}$$

における重み ω_j を

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right)\zeta^{-n-1}\, d\zeta \\ &\simeq \frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l/L} \end{aligned} \tag{5}$$

によって与える方法を提案した。ここに、F は f の Laplace 変換であり、$\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty}\delta_j\zeta^j$ は差分法 (線形多段解法) における生成多項式の商である。また $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ であり、$\rho < 1$ は要求される精度により決定する。

4　離散作用素積分法による境界要素法の定式化

境界積分方程式 (2) の繰り込み積を (4) の和の形に離散化することを考える。(5) によれば、和の重みを計算するためには、基本解の Laplace 変換が必要である。(1) の Laplace 変換は

$$\left[\nabla^2 - \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{s}{\gamma^2}\right)\right]\hat{u}(\boldsymbol{x},s) = \left[\nabla^2 - \kappa(s)^2\right]\hat{u}(\boldsymbol{x},s) = 0 \tag{6}$$

である。ここに、$\hat{u}$ は u の Laplace 変換である。また、$\kappa^2 = \alpha^2 - \beta^2 + s/\gamma^2$ と定義した。s は複素数となるので、κ もまた複素数である。

(6) の基本解および二重層核は 2 次元問題のとき

$$\hat{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s) = \frac{1}{2\pi}K_0(\kappa r), \quad \hat{S}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s) = \frac{\partial \hat{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},s)}{\partial n_y} = -\frac{\kappa}{2\pi}K_1(\kappa r)\frac{\partial r}{\partial n_y} \tag{7}$$

となる。ここに、$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ とおいた。また、K_n は第 2 種の変形 Bessel 関数である。

境界関数を近似基底 ϕ_i により近似して

$$u(\boldsymbol{x},t) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x})u_i(t), \quad s(\boldsymbol{x},t) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x})s_i(t) \tag{8}$$

とおく。境界積分方程式 (2) に (4) を代入し、重み (5) を参照すれば、(2) の離散化方程式

$$C(\boldsymbol{x})\sum_i \phi_i(\boldsymbol{x})u_i(n\Delta t) = \sum_i \sum_{k=1}^{n} A_i^{n-k}(\boldsymbol{x})s_i(k\Delta t) - \sum_i \sum_{k=1}^{n} B_i^{n-k}(\boldsymbol{x})u_i(k\Delta t) \quad (9)$$

が得られる。ここに、A_i^m、B_i^m は影響関数であり、

$$A_i^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{\partial B}\hat{G}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)\phi_i(\boldsymbol{y})dS_y\right]e^{-2\pi iml/L} \quad (10)$$

$$B_i^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{\partial B}\hat{S}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)\phi_i(\boldsymbol{y})dS_y\right]e^{-2\pi iml/L} \quad (11)$$

となる。離散化方程式 (9) を逐次的に解くことにより、拡散方程式 (1) の初期値境界値問題の解を得る。

5 解析例

1 辺が 1 の矩形領域で図–1 のように各辺に境界条件と領域内の初期値を与えた。この領域の境界を 80 等分割したものを境界要素として一定要素による解析を行った。

図–2 および図–3 に解析結果を示す。境界上で解を得ているため図の左右両端は隅角部にあたり、一定要素解析においてはその付近の解は誤差が大きくなることを考慮し、両端付近の解を無視する。

領域内において拡散物質の発生強度が正となるように α^2、β^2 の値を設定したときのポテンシャルの時間変化を図–2 に示している。step 1 からのポテンシャルの時間変化の様子は通常の拡散方程式の場合とほぼ等しい。しかし、step 18 程度の十分な時間が経過した状態におけるポテンシャルの接線方向勾配で両者を比較すると違いは明らかになる。拡散物質の発生強度が 0 である通常の拡散方程式の場合 (図–3:下) では 1.0 で一定であると見なせるのに対し、発生強度が正の場合 (図–3:上) では $u = 1$ の境界条件を与えられた図の左端から $u = 0$ を与えた右端にかけての単調増加曲線を描く。逆に、拡散物質の消滅の割合が大きく、発生強度が負となる場合には単調減少曲線を描く。拡散型方程式における拡散物質の発生と吸収の項の影響が表現されている。

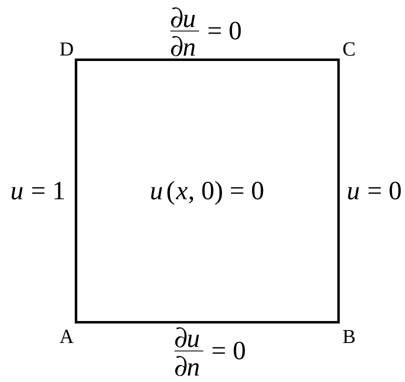
6 おわりに

Lubich の離散作用素積分法を用いることで拡散型方程式の時間領域境界要素法の定式化がなされた。また、簡単な計算モデルを用いた解析によって拡散型方程式の大まかな性質が得られた。

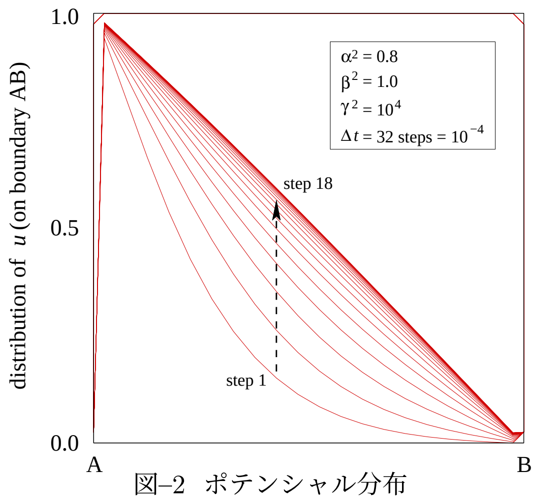
参考文献

[1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Mumer. Math.*, **52**, pp. 129–145, 1988.

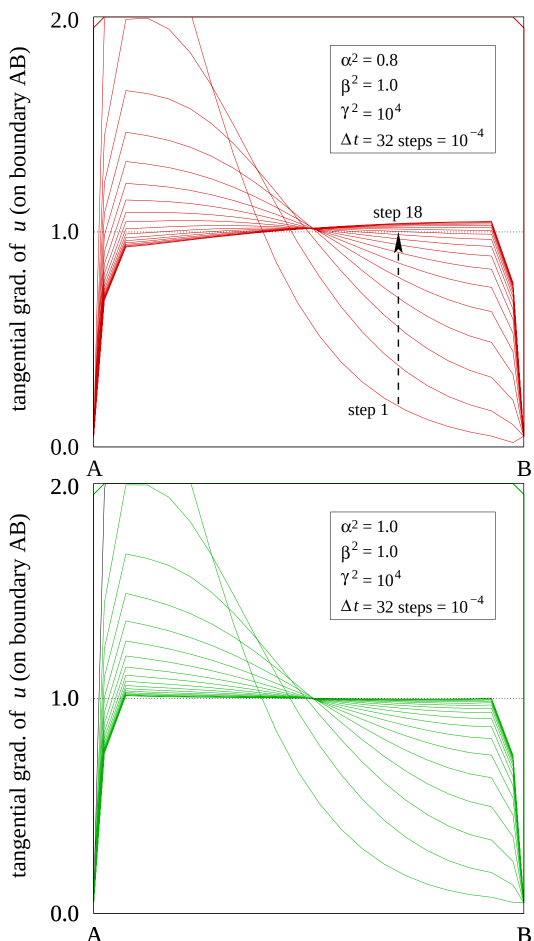
[2] 岡山美央、福井卓雄：離散作用素積分法を利用した時間領域境界要素法の解析, 第 56 回年次学術講演会講演概要集 I, pp. 491, 2003.



図–1 数値計算モデル



図–2 ポテンシャル分布



図–3 接線方向勾配の比較