直交選点有限要素法の開発

― 簡単なストークス方程式の定式化 ―

函館高専　　正会員　○大久保　孝樹

１．はじめに

本研究の目的は，工学や理学の分野で用いられている偏微分方程式の数値計算手法として，新規の直交選点有限要素法を開発することである．ここでは，流体力学で加速度項を無視した粘性流体の方程式であるストークスの方程式を直交選点有限要素法によって定式化を行った．

直交選点法は，1930 年代 Lanczos が選点法の選点配置を直交多項式の根の値として選点位置を規定し，低次の解であってもほぼ正解に近い値が得られることから，コンピュータの発達していなかったこの年代の有力な数値計算手法として用いられていた．直交選点法は，初期値問題として 1930～1960 年代 Clenshaw, Norton, Wright らによって用いられ、その後 1960 年代 Villadsen, Stewart らによって境界値問題に応用されるに至った。現在，コンピュータによる膨大な数値計算が行われるようになって，直交選点法は差分と競争できる有力な手法と考えられている．

本研究では，低次から高次の直交選点法を一領域に用いるだけでなく，多要素領域の重ね合わせができる有限要素化を可能にし，さらに任意の四角形要素でも有限要素化できる座標変換マトリックスの定式化等を可能にした．1930 年代の低次でも直交選点においてほぼ正解が得られるという事実は，現在のコンピュータの機能を考えれば，自動的に高次化できる直交選点法と有限要素化の融合が可能になった現在を基に，さらに発展できる可能性を持っている．現在の研究問題は、直交選点によって計算される微分作用素行列(１次元で８次以上)の数値を如何に桁落ちせずに正確に計算できるかが挙げられる．また，他の分野への応用例がほとんどなく，今後，他の分野の方々と協力できることを願っている．

２．直交選点法によるストークス方程式の定式化

２次元の無次元化ストークス方程式と要素境界の条件はそれぞれ(1)(2)式によって表される．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0\\&\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0\end{aligned}\quad(1)$$

$$\begin{aligned}&\left(-p+\frac{2}{R_e}\frac{\partial u}{\partial x}\right)l+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)m=\text{隣接要素}(-1)\\&\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)l+\left(-p+\frac{2}{R_e}\frac{\partial v}{\partial y}\right)m=\text{隣接要素}(-1)\\&\frac{\partial p}{\partial x}l+\frac{\partial p}{\partial y}m=\text{隣接要素}(-1)\end{aligned}\quad(2)$$

$$\begin{cases}u=\sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}x^{i-1}y^{j-1}d_{uij}\\v=\sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}x^{i-1}y^{j-1}d_{vij}\\P=\sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}x^{i-1}y^{j-1}d_{Pij}\end{cases}\quad(3)$$

(1)(2)式を直交多項式で近似表現するために，u,v,p を(3)式のような多項式として仮定すると，偏微分は(4)のように計算される．数値解として多項式の係数ｄを求めることと各直交選点における u,v,p を求めることとは同等であることから，(5)式のように偏微分を直交選点における u,v,p によって表現できる．(ここでは u のみについて記している)　(5)式を用いて(1)(2)式を定式化すると(6)(7)式となることが容易にわかり，行列表示すると(8)(9)式となる．

$$\begin{bmatrix}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_l=\sum_{i=2}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}(i-1)x_l^{i-2}y_l^{j-1}d_{uij}\\\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_l=\sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=2}^{n_2+2}(j-1)x_l^{i-1}y_l^{j-2}d_{uij}\\\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_l=\sum_{i=3}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}(i-1)(i-1)x_l^{i-3}y_l^{j-1}d_{uij}\\\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_l=\sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=3}^{n_2+2}(j-1)(j-1)x_l^{i-1}y_l^{j-3}d_{uij}\\\left.\frac{\partial u}{\partial x\partial y}\right|_l=\sum_{i=2}^{n_1+2}\sum_{j=2}^{n_2+2}(i-1)(j-1)x_l^{i-2}y_l^{j-2}d_{uij}\end{bmatrix}\quad(4)$$

$$\begin{aligned}&\bar{u}=\bar{\bar{Q}}\bar{d}\\&\bar{d}=\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{u}\\&\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=\bar{\bar{C}}_x\bar{d}=\bar{\bar{C}}_x\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{u}=\bar{\bar{A}}_x\bar{u}\\&\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=\bar{\bar{C}}_y\bar{d}=\bar{\bar{C}}_y\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{u}=\bar{\bar{A}}_y\bar{u}\\&\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}=\bar{\bar{D}}_x\bar{d}=\bar{\bar{D}}_x\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{u}=\bar{\bar{B}}_x\bar{u}\\&\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}=\bar{\bar{D}}_y\bar{d}=\bar{\bar{D}}_y\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{u}=\bar{\bar{B}}_y\bar{u}\\&\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x\partial y}=\bar{\bar{F}}_{xy}\bar{d}=\bar{\bar{F}}_{xy}\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{u}=\bar{\bar{C}}_{xy}\bar{u}\end{aligned}\quad(5)$$

$$\begin{aligned}&\bar{\bar{A}}_x\bar{u}+\bar{\bar{A}}_y\bar{u}=0\\&\bar{\bar{A}}_x\bar{P}-\frac{1}{R_e}\left(\bar{\bar{B}}_x\bar{u}+\bar{\bar{B}}_y\bar{u}\right)=0\\&\bar{\bar{A}}_y\bar{P}-\frac{1}{R_e}\left(\bar{\bar{B}}_x\bar{v}+\bar{\bar{B}}_y\bar{v}\right)=0\end{aligned}\quad(6)$$

$$\begin{aligned}&\left(-\bar{P}+\frac{2}{R_e}\bar{\bar{A}}_x\bar{u}\right)l+\frac{1}{R_e}\left(\bar{\bar{A}}_y\bar{u}+\bar{\bar{A}}_x\bar{v}\right)m=S'_x\\&\frac{1}{R_e}\left(\bar{\bar{A}}_y\bar{u}+\bar{\bar{A}}_x\bar{v}\right)l+\left(-\bar{P}+\frac{2}{R_e}\bar{\bar{A}}_y\bar{v}\right)m=S'_y\\&\bar{\bar{A}}_x\bar{P}l+\bar{\bar{A}}_y\bar{P}m=S'_P\end{aligned}\quad(7)$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\bar{A}}_x & \bar{\bar{A}}_y & 0\\0 & \frac{1}{R_e}\left(\bar{\bar{B}}_x+\bar{\bar{B}}_y\right) & \bar{\bar{A}}_y\\\frac{1}{R_e}\left(\bar{\bar{B}}_x+\bar{\bar{B}}_y\right) & 0 & \bar{\bar{A}}_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}\\\bar{v}\\\bar{P}\end{bmatrix}=0\quad(8)$$

$$\begin{bmatrix}\frac{2}{R_e}\bar{\bar{A}}_x l+\frac{1}{R_e}\bar{\bar{A}}_y m & \frac{1}{R_e}\bar{\bar{A}}_x m & -l\\\frac{1}{R_e}\bar{\bar{A}}_y l & \frac{2}{R_e}\bar{\bar{A}}_y m+\frac{1}{R_e}\bar{\bar{A}}_x l & -l\\0 & 0 & \bar{\bar{A}}_x l+\bar{\bar{A}}_y m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}\\\bar{v}\\\bar{P}\end{bmatrix}\quad(9)$$

キーワード：数値解析手法，偏微分方程式、直交選点有限要素法、直交選点法、有限要素法、座標変換マトリックス
連絡先：〒042－8501　函館市戸倉町 14－1　函館工業高等専門学校環境都市工学科大久保研究室　TEL 0138-59-6487

３．座標変換マトリックス

一般座標系から局所座標系への変換マトリックスは，偏微分法における合成関数の偏微分を２階まで行い以下のように作成した. なお, この行列は一般座標系から局所座標系への変換マトリックスを表示しており, 局所座標系から一般座標系への変換マトリクスは, この行列の逆行列となる. 一般座標 x, y は, 局所座標 ξ, η を用い同じ直交多項式で表示し，アイソパラメトリックとする.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial \xi} \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$[J'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \end{bmatrix}$$

局所座標系から一般座標系への座標変換マトリックスは[J]＝[J ’]$^{-1}$となる.

４．一般座標系でのストークス方程式と要素境界の定式化

ストークス方程式を座標変換マトリックスを用いて，直交選点法で定式化すると以下のようになる.

［ストークス方程式］

$$\left[J_{I11}A_{\xi lm} + J_{I12}A_{\eta lm} + J_{I13}B_{\xi lm} + J_{I14}B_{\eta lm} + J_{I15}C_{\xi\eta lm}\right][u] + \left[J_{I21}A_{\xi lm} + J_{I22}A_{\eta lm} + J_{I23}B_{\xi lm} + J_{I24}B_{\eta lm} + J_{I25}C_{\xi\eta lm}\right][v] = 0$$

$$\left[J_{I11}A_{\xi lm} + J_{I12}A_{\eta lm} + J_{I13}B_{\xi lm} + J_{I14}B_{\eta lm} + J_{I15}C_{\xi\eta lm}\right][P] - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left[J_{I31}A_{\xi lm} + J_{I32}A_{\eta lm} + J_{I33}B_{\xi lm} + J_{I34}B_{\eta lm} + J_{I35}C_{\xi\eta lm}\right][u]\right.$$
$$\left. + \left[J_{I41}A_{\xi lm} + J_{I42}A_{\eta lm} + J_{I43}B_{\xi lm} + J_{I44}B_{\eta lm} + J_{I45}C_{\xi\eta lm}\right][u]\right) = 0$$

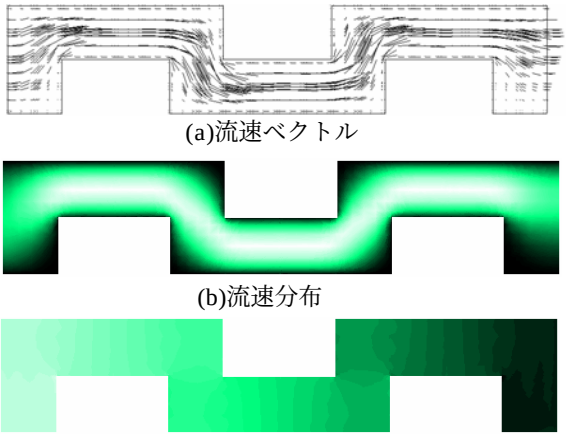
$$\left[J_{I21}A_{\xi lm} + J_{I22}A_{\eta lm} + J_{I23}B_{\xi lm} + J_{I24}B_{\eta lm} + J_{I25}C_{\xi\eta lm}\right][P] - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left[J_{I31}A_{\xi lm} + J_{I32}A_{\eta lm} + J_{I33}B_{\xi lm} + J_{I34}B_{\eta lm} + J_{I35}C_{\xi\eta lm}\right][v]\right.$$
$$\left. + \left[J_{I41}A_{\xi lm} + J_{I42}A_{\eta lm} + J_{I43}B_{\xi lm} + J_{I44}B_{\eta lm} + J_{I45}C_{\xi\eta lm}\right][v]\right) = 0$$

［要素境界条件］

$$\left(\left[-P\right] + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left[J_{I11}A_{\xi lm} + J_{I12}A_{\xi lm} + J_{I13}B_{\xi lm} + J_{I14}B_{\eta lm} + J_{I15}C_{\xi\eta lm}\right][u]\right)l +$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left[J_{I21}A_{\xi lm} + J_{I22}A_{\xi lm} + J_{I23}B_{\xi lm} + J_{I24}B_{\eta lm} + J_{I25}C_{\xi\eta lm}\right][u] + \left[J_{I11}A_{\xi lm} + J_{I12}A_{\xi lm} + J_{I13}B_{\xi lm} + J_{I14}B_{\eta lm} + J_{I15}C_{\xi\eta lm}\right][v]\right)m = \left[\text{隣接要素}\right]$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left[J_{I21}A_{\xi lm} + J_{I22}A_{\xi lm} + J_{I23}B_{\xi lm} + J_{I24}B_{\eta lm} + J_{I25}C_{\xi\eta lm}\right][u] + \left[J_{I11}A_{\xi lm} + J_{I12}A_{\xi lm} + J_{I13}B_{\xi lm} + J_{I14}B_{\eta lm} + J_{I15}C_{\xi\eta lm}\right][v]\right)m$$
$$+ \left(\left[-P\right] + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left[J_{I21}A_{\xi lm} + J_{I22}A_{\xi lm} + J_{I23}B_{\xi lm} + J_{I24}B_{\eta lm} + J_{I25}C_{\xi\eta lm}\right][v]\right)l = \left[\text{隣接要素}\right]$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left[J_{I11}A_{\xi lm} + J_{I12}A_{\xi lm} + J_{I13}B_{\xi lm} + J_{I14}B_{\eta lm} + J_{I15}C_{\xi\eta lm}\right][P]l + \left[J_{I21}A_{\xi lm} + J_{I22}A_{\xi lm} + J_{I23}B_{\xi lm} + J_{I24}B_{\eta lm} + J_{I25}C_{\xi\eta lm}\right][P]\right)m = \left[\text{隣接要素}\right]$$

５．数値計算結果

図-1 は，矩形要素数 14，１要素内の内部選点数 7×7(49) における流速ベクトル(a)，流速分布(b)、圧力分布(c)を示したものである．**図-2** は，任意の四角形要素数 20，１要素内の内部選点 7×7(49)における流速ベクトルと流速分布を示したものである．レイノルズ数は１であり U,V,P を無次元値としているので非常に細い領域を流れている場合を考えている．たとえば，生物膜内のチャネルの流れなどが考えられる．他の流体数値計算用のソフトと比較していないので差分や他の有限要素法との優劣は付けがたいが，一般の有限要素法における圧力の次数の低減は定式化において行っていない．　[参考文献]B.A.フィンレイソン著,鷲津・山本・川井共訳,重みつき残差法と変分原理,培風館



(a)流速ベクトル　(b)流速分布　(c)圧力分布

図-1 矩形の直交選点有限要素法による数値計算結果

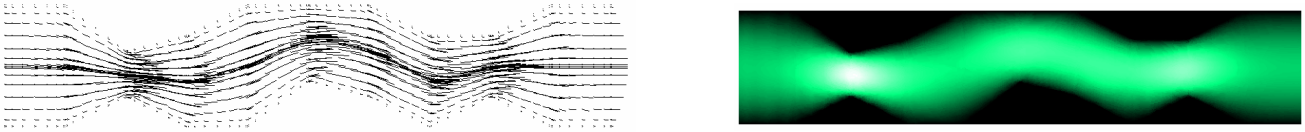


図-2 任意の四角形要素の直交選点有限要素法による数値計算結果