

CIVA/VOF 法を用いた有限要素法による流体—構造連成解析

中央大学大学院 学生員 ○加藤 和範
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

本研究では、固定メッシュを用いて構造物と自由表面を有する流体との相互作用現象を安定かつ高精度に解析することを目的として、VOF 法¹⁾に基づく解析手法の構築を行う。自由表面位置と構造物位置を決定する界面関数の移流方程式の解法として、CIP 法²⁾を三角形要素に拡張した CIVA 法³⁾を用いる。流れ場の離散化手法としては、SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用い、要素としては、任意形状への適合性に優れた P1/P1（流速・圧力 1 次）要素を用いる。数値解析例として、水中への構造物落下問題を行い、本手法（CIVA/VOF 法）の有効性を検討する。

2. 数値解析手法

(1) 流れ場の計算

本手法における基礎方程式は、非圧縮粘性流体の Navier-Stokes の運動方程式と連続式で表される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここに、 Ω は解析領域、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力を表している。また、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (4)$$

ここに、 p は圧力、 μ は粘性係数である。

式 (1),(2) に対する空間方向の離散化には、SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用いる。時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用し、連続式は陰的に取り扱う。また、移流速度は 2 次精度 Adams-bashforth 公式により得られている。なお、連立一次方程式の解法には Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いる。

(2) 構造物領域の計算

構造物の運動²⁾は、並進運動と重心周りの回転運動に分けて考えることが可能である。本手法は、これら 2 つの運動により構造物の移動速度を求める。

a) 並進運動の計算

構造物の重心位置 $\mathbf{x}_s$ は、以下の式で計算される。

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \mathbf{x} \rho_s \phi_s d\Omega \quad (5)$$

ここで、 ρ_s は構造物の密度、 ϕ_s は識別関数であり構造物であれば 1、それ以外であれば 0 となる。 M は構造物の質量

を表す。また、重心位置における加速度は、構造物の重心の座標を表す式 (5) に対して時間の二階微分を行うことにより、以下のように求まる。

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_s}{dt} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \rho_s \phi_s d\Omega \quad (6)$$

ここで、 $d\mathbf{u}/dt$ は、流れ場の計算により求められた圧力 p を用いて計算される。これより、構造物の重心位置での並進速度が計算できる。

b) 重心周りの回転運動の計算

本手法において、慣性モーメント I は構造物の重心座標値 $\mathbf{x}_s$ および各節点の座標値 $\mathbf{x}$ を用いて、以下のように計算される。

$$I = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)^2 \rho_s \phi_s d\Omega \quad (7)$$

また、構造物全体の回転力は、構造物領域内の節点を持つ回転力 Γ_s の総和となり、以下のように表される。

$$\Gamma_s^{total} = \int_{\Omega} \Gamma_s \phi_s d\Omega \quad (8)$$

$$\Gamma_s = (x - x_s) F^y - (y - y_s) F^x \quad (9)$$

よって回転速度は、慣性モーメントおよび構造物全体の回転力を用いて以下の式で計算できる。

$$\frac{d\omega_s}{dt} = \frac{1}{I} \Gamma_s^{total} \quad (10)$$

これより、角速度が計算される。

(3) 自由表面位置と構造物位置の計算

自由表面流れにおける界面関数（VOF 関数）は、次式のような移流方程式に支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (11)$$

ここに、 ϕ は VOF 関数を表し、液体であれば 1、気体であれば 0、自由表面上であれば 0.5 となる。

構造物の識別関数 ϕ_s も同様に、次式のような移流方程式に支配される。

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \phi_s = 0 \quad (12)$$

なお、各節点における密度と粘性係数は、計算された VOF 関数 ϕ 及び識別関数 ϕ_s を用いて次式のように決定できる。

$$\rho = \rho_s \phi_s + (\rho_l \phi + \rho_g (1 - \phi)) (1 - \phi_s) \quad (13)$$

$$\mu = \mu_s \phi_s + (\mu_l \phi + \mu_g (1 - \phi)) (1 - \phi_s) \quad (14)$$

ここに、 ρ_s , ρ_l , ρ_g , μ_s , μ_l , μ_g はそれぞれ構造物、液体、気体の密度および粘性係数である。

KeyWords： 流体—構造連成解析, CIVA 法, VOF 法, 安定化有限要素法

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kazu-1@civil.chuo-u.ac.jp

3. 数值解析例

(1) アルキメデスモデル

本手法の有効性を検討するため、図-1に示すような初期条件のもとに解析を行い、アルキメデスの原理による理論解との比較を行なった。時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ [s] とし、構造物の密度は、100.0, 200.0, 300.0, 400.0, 500.0 kg/m³ とする。有限要素分割は、水平方向 50 分割、鉛直方向 50 分割、分割幅 1cm のものを用いる。

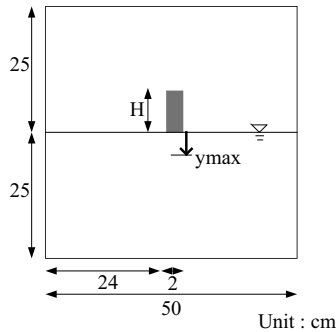


図-1 解析モデル

本手法により計算された構造物底面の鉛直方向最大移動距離 $y_{\max}$ と、アルキメデスの原理による理論解との比較を図-2に示す。図より、本手法による解析結果は、アルキメデスの原理による理論解とよい一致を示している。

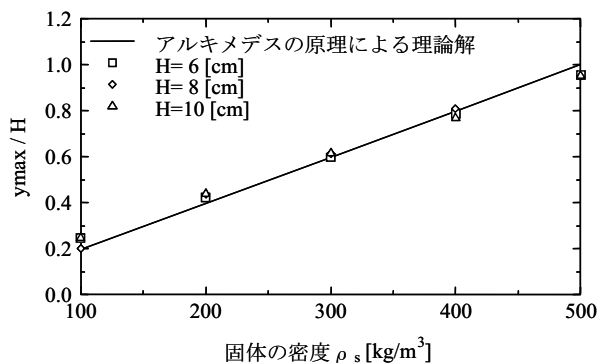


図-2 アルキメデスの原理による理論解との比較

(2) 水中への構造物落下問題

数値解析例として、図-3 に示するような直径 4[cm] の円柱構造物の水中への落下問題を取り上げる。時間増分量は $\Delta t=5.0 \times 10^{-4}$ [s] とし、流体の密度および粘性係数は 20 °C における水 (998.0 kg/m^3 , $1.01 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$) と空気 (1.205 kg/m^3 , $1.81 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$) の値を用いる。また、構造物の密度は、 600.0 kg/m^3 とする。有限要素分割は、水平方向 90 分割、鉛直方向 120 分割、分割幅 0.333cm のものを用いる。

図-4に自由表面形状および構造物位置の時系列を示す。図より、構造物が落下した衝撃で液体領域において波が発生し、その後構造物が浮力を受けて移動していく様子がわかる。これより、構造物と自由表面を有する流体との相互作用現象が表現できていることが確認できる。

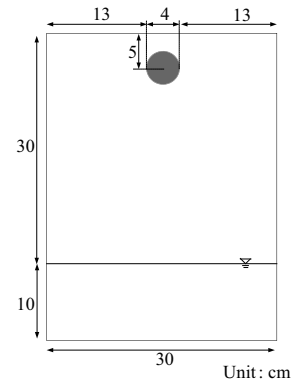


図-3 解析モデル

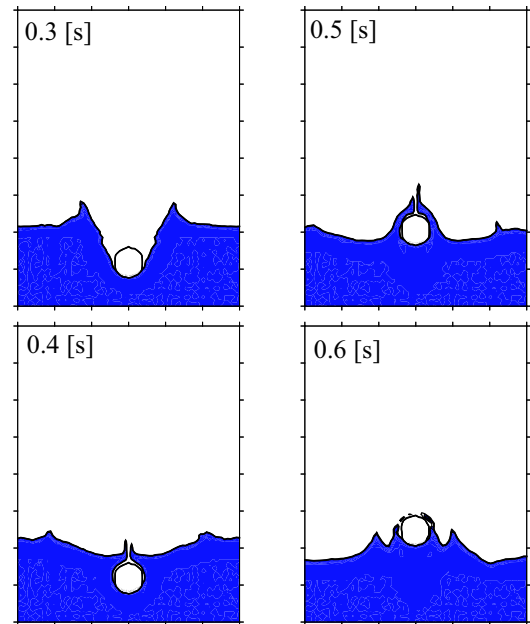


圖-4 解析結果

4. おわりに

本研究では、構造物と流体の相互作用による複雑な挙動を安定かつ高精度に解析することを目的として、CIVA/VOF法に基づく解析手法の構築を行った。水中への構造物落下問題を行い、本手法の有効性を検討した結果、以下の結論が得られた。

- アルキメデスの原理による理論解との比較により、本手法の妥当性が確認できた。
- 構造物と流体の相互作用による複雑な挙動を安定に解析でき、本手法の有効性が示された。

今後の課題として、実験結果とのより詳細な検討、及び構造物同士の接触等の考慮を行なう予定である。

参考文献

- 1) Hirt, C.W., Nichols, B.D. : Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.* , 39, pp.201-255 : 1981
- 2) Xiao, F., Yabe, T., Ito, T. and Tajima, M. : 'An algorithm for simulating solid objects suspended in stratified flow' , *Comput. Phys. Commun.* , 102, pp.147-160 : 1997.
- 3) 田中伸厚 : 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集 (B 編) , 64 巻 620 号: 1998