

微視構造を考慮した透水モデルの提案

（株）フジタ技術センター土木研究部 正会員 仲沢 武志

1.はじめに

地盤や地下水の汚染問題を考える際、浄化手段の選択やその効果を事前に精度よく検討することができれば合理的に対応することが可能となる。地盤や地下水の汚染問題は一般に物質移行拡散解析を用いて計算されている。そこでの移流項にはダルシー流速を間隙率で除した実流速が広く用いられているが、本文では、土要素内部の微視構造を考慮した透水モデルを考えることで、実流速の概念を一般化する1つの手法を提案する。得られる結果はある条件下で従来の実流速に一致し、1つの自然な拡張モデルと考えられる。

2.微視構造を考慮した透水モデルの定式化

本文で考えるモデルの定式化には、微視力学で用いられている等価介在物法¹⁾を用いる。等価介在物法は、微視構造を構成する介在物が回転体であるとき、固有量と Eshelby テンソルならびに母材の物性でその影響を表現するものである。なお、微視力学での等価介在物法が応力やひずみの様な2階のテンソルを扱うのに対し透水モデルでは流速やヘッド勾配の様にベクトルとなること、また微視力学での固有量が固有ひずみであるのに対し透水モデルでの固有量は固有ヘッド勾配となることに注意する。また、領域平均には森・田中の手法²⁾を用いる。

(1) 等価介在物法に基づく透水モデル

透水係数 $k^{(I)}$ を持つ介在物が透水係数 $k^{(M)}$ の領域に体積比率 f で一様に分布しているとする。この時、各々の相におけるダルシー則は次式のように表わせる。

$$v^{(M)} = -k^{(M)} \frac{\partial h^{(M)}}{\partial x} \quad (\text{母材})$$

$$v^{(I)} = -k^{(I)} \frac{\partial h^{(I)}}{\partial x} \quad (\text{介在物}) \quad (1)$$

介在物の影響を考慮した上での平均的な母材に

おけるダルシー則が、領域内での平均ヘッド勾配 $\langle \partial h^{(D)} / \partial x \rangle$ を導入して次式のように表わせるとした平均化手法が森・田中の手法である。

$$\langle v^{(M)} \rangle = -k^{(M)} \langle \frac{\partial h^{(D)}}{\partial x} \rangle \quad (2)$$

また、介在物内のダルシー則は領域内で平均的に次式のように書けるものとする。

$$\langle v^{(I)} \rangle = -k^{(I)} \langle \frac{\partial h^{(I)}}{\partial x} \rangle \quad (3)$$

ここで、介在物内部のヘッド勾配を母材のヘッド勾配と介在物自体の乱れ分 $\partial h^{(F)} / \partial x$ の和として次式のように表わす。

$$\langle \frac{\partial h^{(I)}}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial h^{(D)}}{\partial x} \rangle + \frac{\partial h^{(F)}}{\partial x} \quad (4)$$

介在物内部の平均的なダルシー則は式(3)と(4)から次のように得られる。

$$\begin{aligned} \langle v^{(I)} \rangle &= -k^{(I)} \left(\langle \frac{\partial h^{(D)}}{\partial x} \rangle + \frac{\partial h^{(F)}}{\partial x} \right) \\ &= -k^{(M)} \left(\langle \frac{\partial h^{(D)}}{\partial x} \rangle + \frac{\partial h^{(F)}}{\partial x} - \frac{\partial h^*}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)の第2等号は介在物内部の平均流速を母材の透水性で表わして、それは固有ヘッド勾配 $\partial h^* / \partial x$ を導入することで可能となることを示した等価介在物法に基づいている。

さらに、介在物自体のヘッド勾配の乱れ分 $\partial h^{(F)} / \partial x$ は母材の物性と介在物の形状から計算される Eshelby テンソル S を用いて $\partial h^{(F)} / \partial x = S(\partial h^* / \partial x)$ と表わせる。これより、固有ヘッド勾配は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^*}{\partial x} &= [k^{(M)} - (k^{(M)} - k^{(I)})S]^{-1} (k^{(M)} - k^{(I)}) \langle \frac{\partial h^{(D)}}{\partial x} \rangle \\ &= -[k^{(M)} - (k^{(M)} - k^{(I)})S]^{-1} (k^{(M)} - k^{(I)}) k^{(M)^{-1}} \langle v^{(M)} \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

一方、領域全体の平均量としての流速 $\langle v \rangle$ とヘッド勾配 $\langle \partial h / \partial x \rangle$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= f \langle v_I \rangle + (1-f) \langle v_M \rangle \\ \langle \frac{\partial h}{\partial x} \rangle &= f \langle \frac{\partial h^{(I)}}{\partial x} \rangle + (1-f) \langle \frac{\partial h^{(M)}}{\partial x} \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

キーワード：地盤汚染、透水、微視構造、実流速

連絡先：〒243-0125 神奈川県厚木市小野 2025-1 TEL 046-250-7095 FAX 046-250-7139

式(7)第 2 式と式(4)から領域内全体の平均ヘッド勾配は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial h}{\partial x} \rangle &= f \langle \frac{\partial h^{(I)}}{\partial x} \rangle + (1-f) \langle \frac{\partial h^{(F)}}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial h^{(D)}}{\partial x} \rangle + f \langle \frac{\partial h^{(F)}}{\partial x} \rangle \\ &= -k^{(M)^{-1}} \langle v^{(M)} \rangle + f S \frac{\partial h^*}{\partial x} \\ &= -[I + fS\{k^{(M)} - (k^{(M)} - k^{(I)})S\}^{-1}(k^{(M)} - k^{(I)})]k^{(M)^{-1}} \langle v^{(M)} \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

ここに I はクロネッカーのデルタを表わす。

また、式(7)第 1 式と式(5)から領域内全体の平均流速は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= f \langle v^{(I)} \rangle + (1-f) \langle v^{(M)} \rangle \\ &= [I + f(S-I)\{k^{(M)} - (k^{(M)} - k^{(I)})S\}^{-1}(k^{(M)} - k^{(I)})] \langle v^{(M)} \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

領域全体のダルシー則となる $\langle v \rangle = -\langle k \rangle \langle F \rangle$ と式(8)および式(9)から領域全体の平均的な透水性である $\langle k \rangle$ は次式のように計算される。

$$\langle k \rangle = [k^{(M)} + f k^{(M)}(S-I)P(k^{(M)} - k^{(I)})][I + fSP(k^{(M)} - k^{(I)})]^{-1} \quad (10)$$

ここに、 $P = \{k^{(M)} - (k^{(M)} - k^{(I)})S\}^{-1}$ とおいた。式(10)が実験等で計測される透水性と解釈できる。

(2) 従来の実流速との関連

式(9)から求められる $\langle v \rangle$ がいわゆるダルシー流速である。よって、式(9)を次式のように書き換えて $\langle v^{(M)} \rangle$ を表わす。

$$\langle v_M \rangle = [I + f(S-I)\{k^{(M)} - (k^{(M)} - k^{(I)})S\}^{-1}(k^{(M)} - k^{(I)})]^{-1} \langle v \rangle \quad (11)$$

式(11)において $k_I \rightarrow 0$ と考えると式(11)から計算される流速は $\langle v_M \rangle = \langle v \rangle / (1-f)$ となり、これは従来の実流速と一致する。

3. 適用例

式(10)から計算される領域全体の平均透水性係数を図 1 ならびに図 2 に示す。ここでは介在物の形状を球形としたものを示している。このとき Eshalby テンソルは $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 1/3$ と求められその他の成分はゼロとなる。

なお、図1や図2には Hashin 等の上下界値³⁾や Voigt モデル Reuss モデル⁴⁾の結果も示してある。これらより、等価介在物法から計算される値が、介在物の形状が球形である場合 Hashin 等の上下界値のどちらかに一致すること等、微視力学で得られている結果と同様な平均的な性質を透水性でも示すことがわかる。

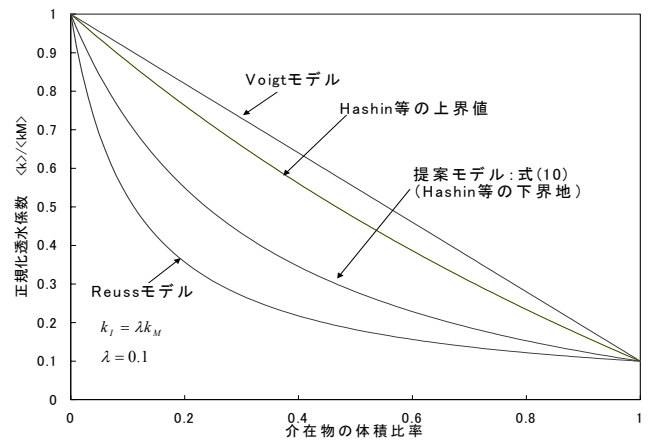


図 1 各種平均化の比較 ($k_M > k_I$)

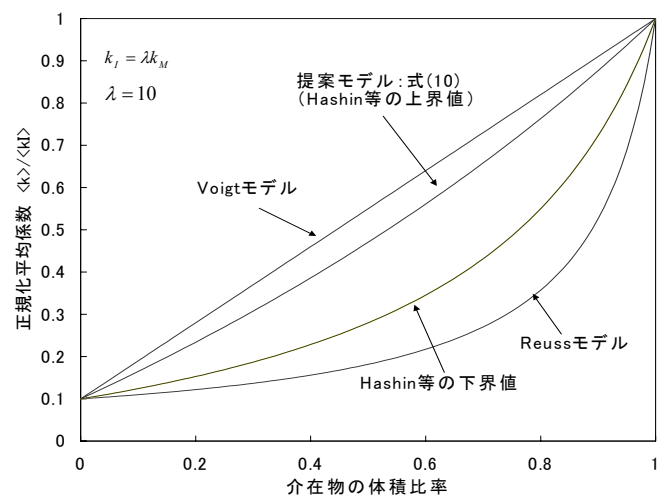


図 2 各種平均化の比較 ($k_I > k_M$)

4. あとがき

本文では、微視構造を考慮した透水性の定式化について考察した。ここで一般化された概念を今後地盤や地下水の汚染問題へ適用する手法へ適用したいと考えている。

参考文献

- 1) Mura, T.: Micromechanics of Defects in Solids 2nd ed., Martinus Nijhoff Publ, 1987
- 2) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, Act. Metall., Vol. A241, 1957
- 3) Hashin, Z. and Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase Materials, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 11, 1963
- 4) 大南正瑛：マイクロメカニクス入門、オーム社、1980