一般化座標系における遠心力を考慮した波動方程式の導出

中央大学理工学部 正会員 ○山田 拓也
(株) エコー 正会員 原 信彦
中央大学理工学部 フェロー会員 山田 正

１．はじめに

津波の河川遡上や洪水波の流下等, 河川を伝播する波動現象は河川管理上非常に重要な問題である.特に河川蛇行部では曲率に伴う遠心力の影響により, 波の振幅が増大する事が考えられる. 本研究では任意河川形状に沿う一般化座標系を用いて地形形状を正確に考慮した河川に於ける波動解析を行う. テンソル解析に基づき任意河川形状に沿う座標系へオイラー方程式を座標変換する. さらに変換した基礎式を用いて河川形状による遠心力を考慮した波動方程式を導出し, Sine Generated Curveで表現される蛇行水路を例として遠心力が波に与える影響を解析した.

２．一般化座標系でのオイラー方程式・不定流方程式

2.1 テンソル表記の基礎方程式 流体運動を理論解析や数値実験で解析する場合, 解析空間は通常複雑な地形形状を有する場合が多い.この場合, デカルト座標系に基づき矩形メッシュを作成して解析を行う事は, 物理現象を正しく捉えられず, 解析上も境界条件の設定が非常に複雑になるため解析手法として有効ではない.この様な背景から, 本研究ではテンソル解析を用いて任意の地形に沿う一般化座標系への座標変換を行い波動解析を行う. テンソル成分表記のオイラー方程式及び連続式は式(1)(2)で表される. $\tilde{x}^i=(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)$は地形適合座標, $x^i=(x^1,x^2,x^3)=(x,y,z)$はデカルト座標, $\tilde{u}^i$ は i 方向流速のテンソル成分, 下付添字はテンソルの共変成分, 上付添字は反変成分を表す. また ρ は密度, g は重力加速度, $\tilde{G}^{ij}$は共変計量テンソル, L は蛇行長, 下付添字; は共変微分であり, 式

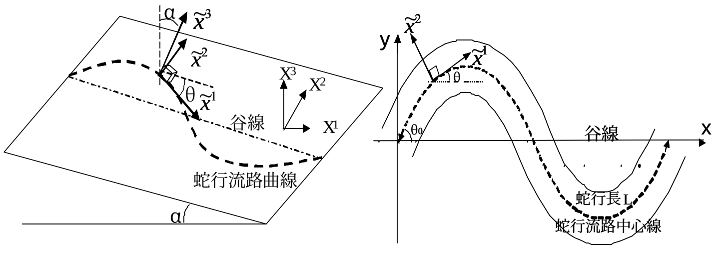

図-1 変数及び座標系の定義図

(1) (2)の全項は反変テンソル成分である.

2.2 河川に沿う一般化座標系への座標変換 河川に沿う一般化座標の概要及び変数定義を**図-1**に示す. 河川に沿う座標系とデカルト座標の関係式を式(3)(4)(5)に示す. 式(6)を適用すると, Sine Generated Curve 座標系となる. 式(1)(2)を河川に沿う一般化座標系に変換すると式 (7) (8)(9)(10)となる. 式(7)は連続式, 式(8)(9)(10)は各々 $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$ 方向の運動方程式, $\bar{u}^i$ はテンソル成分から物理成分へと変換した河川に沿う座標での i 方向流速である. 但し, 式(8)(9)(10)は谷線と流路中心線との偏角 θ (Sine Generated Curve では式(13))を適用しておらず, 従って偏角 θ の与え方により様々な河川形状に適用可能な, 極めて一般的なオイラー方程式である. 現実の河川形状を理論･数値解析における座標系として取り込むためには, 偏角θを実際の河川形状に合う様に定めればよい. ここで独立変数の表記を$\tilde{x}^i=(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)=(s_a,n_a,z_a)$と書き直す. 式(10)を用いて静水圧近似を適用後, 式(7)(8)(9)を z_a 方向に断面積分を行い流下方向及び横断方向の流量フラックスM, Nを用いて上式を書き直す. 但し水面には運動学的条件, 河床は平坦床と設定した. 式

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t}+\tilde{u}^j\cdot\tilde{u}^i{}_{;j}=-\frac{1}{\rho}\tilde{G}^{ij}p_{;j}-g\tilde{G}^{ij}\frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^j} \quad (1)$$

$$\tilde{u}^j{}_{;j}=0 \quad (2)$$

$$x^1=\left(\int_0^{\tilde{x}^1}\cos\theta d\tilde{x}^1-\tilde{x}^2\sin\theta\right)\cos\alpha+\tilde{x}^3\sin\alpha \quad (3)$$

$$x^2=\int_0^{\tilde{x}^1}\sin\theta d\tilde{x}^1+\tilde{x}^3\cos\alpha \quad (4)$$

$$x^3=-\left(\int_0^{\tilde{x}^1}\cos\theta d\tilde{x}^1-\tilde{x}^2\sin\theta\right)\sin\alpha+\tilde{x}^3\cos\alpha \quad (5)$$

$$\theta=\theta_0\cos\frac{2\pi\tilde{x}^1}{L} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \tilde{x}^1}+\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2}\left\{\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)\bar{u}^2\right\}+\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)\frac{\partial\bar{u}^3}{\partial\tilde{x}^3}=0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial t}+\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)^{-1}\bar{u}^1\frac{\partial\bar{u}^1}{\partial\tilde{x}^1}+\bar{u}^2\frac{\partial\bar{u}^1}{\partial\tilde{x}^2}+\bar{u}^3\frac{\partial\bar{u}^1}{\partial\tilde{x}^3}-\bar{u}^1\bar{u}^2\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)^{-1}\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}-g\cos\theta\sin\alpha+\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)^{-1}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\tilde{x}^1}=0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t}+\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)^{-1}\bar{u}^1\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial\tilde{x}^1}+\bar{u}^2\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial\tilde{x}^2}+\bar{u}^3\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial\tilde{x}^3}-\left(\bar{u}^1\right)^2\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)^{-1}\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}+g\sin\theta\sin\alpha+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\tilde{x}^2}=0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^3}{\partial t}+\left(1-\tilde{x}^2\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{x}^1}\right)^{-1}\bar{u}^1\frac{\partial\bar{u}^3}{\partial\tilde{x}^1}+\bar{u}^2\frac{\partial\bar{u}^3}{\partial\tilde{x}^2}+\bar{u}^3\frac{\partial\bar{u}^3}{\partial\tilde{x}^3}+g\cos\alpha+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\tilde{x}^3}=0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial M}{\partial s_a}-\frac{N}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}+\frac{\partial N}{\partial n_a}=0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial}{\partial s_a}\left(\frac{\beta_1M^2}{\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{\beta_2MN}{\eta}\right)-\frac{2\beta_2MN}{\eta\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}-g\eta\cos\theta\sin\alpha+g\eta\cos\alpha\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial s_a}=0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial}{\partial s_a}\left(\frac{\beta_2MN}{\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{\beta_3N^2}{\eta}\right)-\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\left(\frac{\beta_1M^2-\beta_3N^2}{\eta}\right)\frac{d\theta}{ds_a}+g\eta\sin\theta\sin\alpha+g\eta\cos\alpha\frac{\partial\eta}{\partial n_a}=0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}-gh\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial s_a}=0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}\left(\frac{M^2}{h}\right)+gh\frac{\partial\eta}{\partial n_a}=0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-gh\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial {s_a}^2}-gh\frac{\partial^2\eta}{\partial {n_a}^2}+gh\frac{n_a}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)^3}\frac{d^2\theta}{d{s_a}^2}\frac{\partial\eta}{\partial s_a}+gh\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}\frac{\partial\eta}{\partial n_a}-\frac{1}{h\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}\frac{\partial M^2}{\partial n_a}=0 \quad (16)$$

$$\frac{M}{h}=\sqrt{gh}\frac{(\eta-h)}{h} \quad (17)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-gh\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial {s_a}^2}-gh\frac{\partial^2\eta}{\partial {n_a}^2}+gh\frac{n_a}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)^3}\frac{d^2\theta}{d{s_a}^2}\frac{\partial\eta}{\partial s_a}+gh\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}\frac{\partial\eta}{\partial n_a}-\frac{g}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}\left(\frac{\partial\eta^2}{\partial n_a}-2h\frac{\partial\eta}{\partial n_a}\right)=0} \quad (18)$$

キーワード 一般化座標 蛇行河川 波動解析 遠心力
連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL03-3817-1805 E-mail:y-takuya@civil.chuo-u.ac.jp

(11) は連続式，式 (12) (13) は各々，流下方向 (Sa)，横断方向 (na) の二次元不定流方程式である．β_1, β_2, β_3 は運動量補正係数，η は水位 (全水深) である．また式(12)(13)の左辺第4項は，遠心力効果を表している．

３．一般化座標系に基づく遠心力を考慮したの波動方程式

3.1 二次元不定流方程式の書き換え　河川における波動方程式の導出では，連続式 (11) 及び流下方向･横断方向流量フラックス表示の断面積分型運動方程式(12)(13)を用いる．簡単のため，運動量補正係数 β_1, β_2, β_3 は1とし，河床は平坦床とした．式 (3) (4) (5) を用いて河川に沿う座標系を設定すると，流れがポテンシャルフローの場合，流下方向軸及び横断方向軸は各々，流線及び等ポテンシャル線である.従って，実際の河川の流れも座標軸の取り方により流線である流下方向軸からのズレは小さいとし，運動方程式 (12) (13) の移流項及び遠心力項の横断方向流量フラックスは無視する．本解析では蛇行部で生じる二次流の影響は鉛直断面積分により流下方向及び横断方向の流量フラックスにくみ込まれているが，横断方向の流量フラックスを微小として無視しているため二次元の影響は厳密には考慮していない．また，蛇行河川において生じる波の振幅は微小であるとして水面勾配項以外の水位 (水深) η は静水深 h で代替し，方程式中の遠心力項を除き線形化する．以上より式 (12) (13) から式 (14) (15) を得る．横断方向の運動方程式 (15) には左辺第二項に遠心力項が存在し，これにより河川蛇行部を伝播する波に遠心力の影響が生じる．

3.2 遠心力項の書き換えと波動方程式の導出　式 (14) (15) を用いて任意の抱こう水路において遠心力の影響を考慮した波動方程式を導出する．式 (14) を流下方向 sa で，式 (15) を横断方向 na で1階微分し，1 階時間微分を行った式 (11) に代入すると，式 (16) を得る．さらに式 (16) 中末項の遠心力項を，水位 η を用いて表記する．蛇行水路で生じる波は水深に比べて波長が十分長い長波であると考え，長波の水位と流量の関係式 (17) を用いる．式 (17) を式 (16) の遠心力項に代入すると，水路蛇行部における遠心力の影響を考慮した波動方程式 (18) を得る．式 (18) は水路蛇行部における遠心力の影響を考慮した波動方程式であるが，未だ座標系を確定していないため，実在の河川の形状を座標系として設定することで様々な河川に適用する事が出来る極めて一般的な波動方程式である．

４．一般化座標での波動方程式の数値計算

4.1 数値計算条件　波動方程式(18)を用いて流れの無い蛇行水路の波動伝播数値計算を行った．水路形状として式 (6) を用いて蛇行水路を表す Sine Generated Curve を設定した．数値計算には実験室スケールの矩形断面水路を設定しており，計算

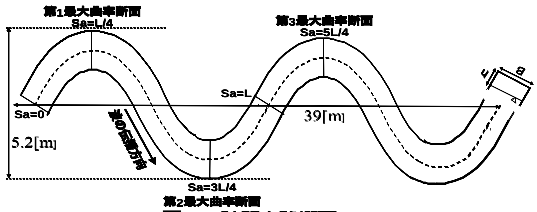

図-2　計算水路概要

表-1　入射波及び水路設定諸元

入射波振幅	a	0.01[m]	**蛇行長**	L	20[m]
入射波周期	T	2[sec]	**最大偏角**	θ_0	π/9
平均水深	h	0.3[m]	**水路床勾配**	α	0
水路幅	B	3[m]			

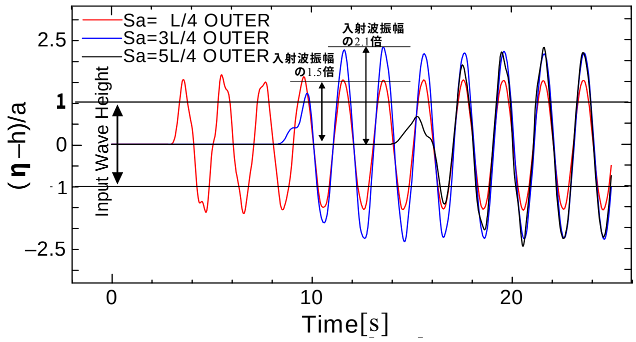

図-3　最大曲率断面外岸の時系列水位変動

入射波振幅に対して第 1 最大局率断面外岸では入射波の 1.5 倍，第 2 及び第 3 最大局率断面外岸では入射波振幅の 2.1 倍まで波の振幅が大きくなっている事が解る

水路概要を**図-2**，入射波及び水路設定緒元を**表-1** に示す．

4.2 遠心力による波の振幅変化　Sa=0 より周期 2 秒，振幅 0.01mの正弦周期波を入射させ，遠心力により波の振幅が増大すると考えられる最大曲率断面外岸における時系列の水位変動を**図-3** に示す．**図-3** より第 1,2,3 最大曲率断面外岸に於ける時系列の水位変動幅を見ると，いずれの地点に於いても入射波の振幅に比べ波の振幅が増大している事が解る．各地点に於ける入射波振幅を基準とした水位変動幅は第 1 最大曲率断面外岸では 1.5，第 2 断面外岸では 2.1，第 3 断面外岸では第 2 断面外岸と同じ 2.1 であった．従って第 2,3 断面外岸に到達した波は入射波に比べ波高が 2.1 倍大きくなっている．これは水路蛇行形状による波高増大効果に加え，蛇行部の内岸から外岸方向へ遠心力が働くためだと考えられる．また第 1 最大曲率断面外岸の水位変動に比べ第2断面外岸，第3断面外岸で水位変動が大きいのは，遠心力により第 1 断面外岸で波高が増大した波が，第 2 断面外岸に於いて遠心力の効果によりさらに波高が増大するためだと考えられる．波の伝播速度に注目すると，第 1,2,3 断面外岸は約 10m間隔であり，波の到達時刻の差から伝播速度を算定すると，長波の伝播速度で伝播している事が解る．

5．まとめ　テンソル解析を用いて任意河川形状に適用可能なオイラー方程式，二次元不定流方程式及び遠心力を考慮した波動方程式を導出し，数値解析により Sine Generated Curve で表される蛇行河川を伝播する周期波の振幅変化を示した．

参考文献　1)池谷 毅,玉井 信行:平坦固定床蛇行水路における 3 次元流況解析,土木学会論文報告集 Vol.342, pp.107-113.(1984)