

浅水長波流れ解析に対する格子ボルツマン法の適用に関する検討

中央大学大学院 学生員 ○石川 裕士
中央大学大学院 学生員 立石 絢也
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

河川、海岸などの水環境流れの多くは、浅水長波方程式で記述される。浅水長波方程式の数値解析手法としては、有限差分法や有限要素法などが主流であるが、近年、格子ボルツマン法 (LBM)¹⁾ を用いた解析方法が提案された²⁾。LBM は、流体粒子の衝突と並進を計算し、巨視的な変数を求める数値解析手法である。この手法は、アルゴリズムが簡便であり、計算が高速、保存性に優れているなどといった特徴がある。従って、津波、高潮や洪水などの浅水長波流れの予測・再現は大規模計算となりかつ高速性が要求されるため、これらの現象に対して LBM は有効な数値解析手法に成り得ると考えられる。

そこで本論文は、LBM による高精度浅水長波流れ解析手法の構築を行うと共に、その有効性について検討した。数値解析例として、2 次元ダムブレイク問題及び孤立波遡上問題を取りあげ、精度、計算時間及び記憶容量について、SUPG 法に基づく安定化有限要素法³⁾ との比較の基に検討を行った。

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン法

LBM は、格子気体法から発展した手法であり、流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体で近似し、各粒子の衝突と並進とを粒子分布関数を用いて逐次計算する。そして、その粒子分布関数を用いて質量保存・運動量保存より巨視的な変数を求める数値解析手法である。

LBM の適用例としては、Navier-Stokes 方程式を扱ったものがほとんどであり、浅水長波方程式への適用は数少ない。しかし、近年、Zhou らによって LBM での浅水長波流れへの応用²⁾ が提案されており、潮汐・津波などの大規模問題への適用が期待されている。

(2) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法において、衝突演算項に格子 BGK モデル¹⁾ を用いた浅水長波方程式に対する格子ボルツマン方程式は以下になる。

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left[f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \right] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \quad (1)$$

上式において、左辺は粒子の並進過程、右辺の 1 項目は衝突過程、2 項目は外力項をそれぞれ示している。 f_{α} は α 方向の粒子がどれくらい存在するかということを表す粒子分布関数、 $\mathbf{e}_{\alpha}$ は粒子の並進速度ベクトル、 f_{α}^{eq} は平衡分布関数である。また、 e は $e = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ で定義され、 Δt は微小時間増分量、 Δx は格子サイズである。この支配方程式により粒子

の計算を局所的に行い、陽的に未知量 f_{α} を求める。なお、本論文では 2 次元 9 速度モデルを用いている。また、 F_i は外力項であり、以下のように河床勾配、底面及び自由表面でのせん断応力、コリオリ力を用い表される。

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i \quad (2)$$

また式 (1) において、 τ は単一時間緩和係数と呼ばれる定数であり、1 タイムステップの衝突で粒子が格子点上において一定の割合 $\frac{1}{\tau}$ で局所的な平衡状態に近づいていくことを示している。 τ は、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e と以下のような関係にある。

$$\tau = \frac{3\nu_e}{e^2 \Delta t} + \frac{1}{2} \quad (3)$$

(3) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数 f_{α}^{eq} とは、格子点上において流体が平衡状態に達したときの粒子分布であり、巨視的な変数である全水深・速度を用いて以下のように求められる。

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i & \alpha = 1 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i & \alpha = 2, 3, 4, 5 \\ + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_i & \alpha = 6, 7, 8, 9 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i & \\ + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_i & \end{cases} \quad (4)$$

上式において、 h は全水深、 u_i は流速、 g は重力加速度である。なお上式の係数は、巨視的な速度においてべき級数を取り、質量保存・運動量保存・エネルギー保存を満たすように決定されている。

(4) 流れの巨視的な変数

格子ボルツマン方程式では、粒子分布関数 f_{α} を未知量とし計算が行われる。流体の巨視的な変数である全水深・速度は、その粒子分布関数と粒子の並進速度ベクトルを用いて以下のように計算される。

$$h = \sum_{\alpha} f_{\alpha}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (5)$$

3. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために、数値解析例として 2 次元ダムブレイク問題及び孤立波遡上問題を取り扱った。

(1) 2 次元ダムブレイク問題

図-1 に解析モデル及び初期水位を示す。この数値解析例は、静止していたダム内の流体が突然崩壊・放流する現象である。境界条件としては、固定壁面を slip 条件とする。

KeyWords: 格子ボルツマン法、浅水長波流れ、開水路流れ

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: yuji@civil.chuo-u.ac.jp

本手法と安定化有限要素法において解析精度の観点から比較を行った。メッシュは両手法ともに 100×10 分割 ($x \times y$) を用い、LBM の計算条件としては、 ν_e を 0.03 ($\tau = 0.59$) とした。また、安定化有限要素法の計算条件としては、連立一次方程式の解法には陽解法である 3-Pass 法を用い、微小時間増分量は 0.005[sec] とした。

解析結果として図-2 に、手法の違いによる影響を確認するために、1[sec] 後における水面形状及び流速図の比較を示す。図より、安定化有限要素法と比較するとオーバーシュート及びアンダーシュートを抑えることができていることが確認できる。

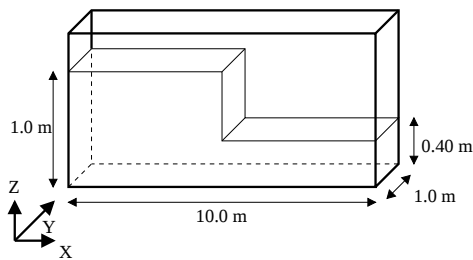


図-1 解析モデル及び初期水位

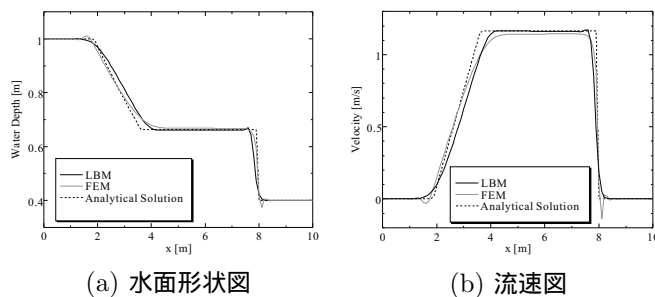


図-2 1[sec] 後における水面形状及び流速図

また、本手法の計算時間及び記憶容量を安定化有限要素法と比較すると、計算時間は安定化有限要素法に対して 64%、また記憶容量は 37% であり、水害予測シミュレーションのような大規模計算でかつ高速性が要求される場合に有効な数値解析手法であるといえる。

(2) 孤立波遡上問題

図-3 に解析モデル及び初期水位を示す。境界条件としては、壁面を slip 条件とする。なお、初期水位変動量及び流速などの諸条件は参考文献⁴⁾を参照されたい。

本手法と安定化有限要素法及び Bova らの計算結果⁴⁾との比較を行った。メッシュは、本手法と安定化有限要素法はともに 400×20 分割 ($x \times y$) を用い、LBM の計算条件としては、 ν_e が 0.006 ($\tau = 0.518$) とする。なお、 $\nu_e = 0.006$ は計算が安定に行われる最小値である。また、安定化有限要素法の計算条件としては、連立一次方程式の解法には陽解法である 3-Pass 法を用い、微小時間増分量は 0.01[sec] とした。

解析結果として図-4 に、0.0, 12.5, 25.0[sec] におけるの水面形状の比較を示す。この図より、本手法は定性的によく表現できており、水面ピーク値も一致している。しかしながら、位相が若干ずれたものになっている。この原因と

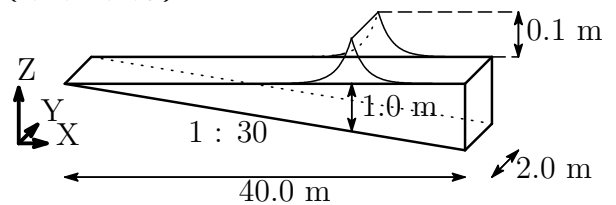


図-3 解析モデル及び初期水位

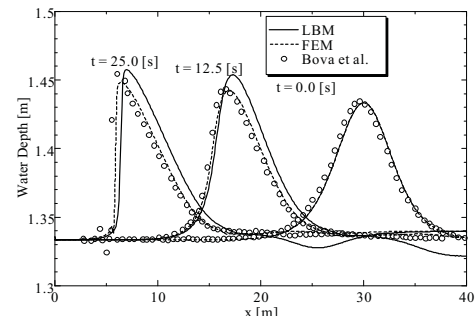


図-4 手法の違いによる水面形状の比較

しては、Bova らの計算結果及び安定化有限要素法では完全流体が仮定されているのに対して、LBM においては非平衡量を決定する単一時間緩和係数 τ に流体の渦動粘性係数 ν_e が加味されていることによるものと考えられる。

また、本手法の計算時間及び記憶容量を安定化有限要素法と比較すると、計算時間は安定化有限要素法に対して 78%、また記憶容量は 31% であり、本手法の有効性を示すことができる。

4. おわりに

本論文は、LBM による高精度浅水長波流れ解析手法の構築を行い、その有効性について検討した。数値解析例として、2 次元ダムブレイク問題及び孤立波遡上問題を取りあげ、精度、計算時間及び記憶容量の比較について、SUPG 法に基づく安定化有限要素法との比較を行った。その結果、以下の結論を得た。

- 本手法による計算結果は、厳密解及び安定化有限要素法による計算結果と良い一致を示し、計算精度の観点から本手法の有効性が確認できた。
- 本手法による計算時間と記憶容量は、安定化有限要素法と比べ有利であり、水害予測シミュレーションのように大規模計算でかつ高速性が要求される場合において、有効であることが確認できた。

今後の課題としては、非構造格子への拡張などが挙げられる。

参考文献

- 1) 稲室隆二:格子ボルツマン法, 物性研究, **77-2**, 197-232, 2001.
- 2) J.G.Zhou: Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows, Springer, 2003.
- 3) S.K.Aliabadi and T.E. Tezduyar: Space-time finite element computation of compressible flows in involving moving boundaries and interfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **107**, 209-223, 1993.
- 4) S.W.Bova, G.F.Carey: Symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow-water equations, *Advances in Water Resources*, **19**, 123-131, 1996.