CIVA/安定化有限要素法による移動境界を考慮した浅水長波流れ解析

1. はじめに

近年、浅水長波方程式に高精度な移流スキームである CIP 法を適用した差分法による数値解析手法¹⁾²⁾が提案され,良 好な解が得られている.しかし,浅水長波流れ解析では,自 然地形を取り扱うことが多いため,任意形状への適合性に 優れている非構造格子に基づく有限要素法が有効であると 言える.

そこで,本論文は CIP 法を非構造格子に対しても適応可 能にした CIVA 法³⁾と安定化有限要素法を用いた解析手法 の提案を行うものである.本解析手法は,浅水長波方程式を 移流段階と非移流段階の2段階に分け,前者には CIVA法, 後者には SUPG 法に基づく安定化有限要素法⁴⁾ (S-FEM) を適用するものである.なお,浅水域における移動境界問題 の解析手法として,複雑地形にも適応可能な非構造格子を用 いた固定メッシュに基づく Euler 的手法を適用した.数値 解析例として段波問題および貯水池部分決壊問題を取り上 げ,本解析手法 (CIVA/S-FEM)の有効性の検討を行った.

2. 数值解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には,以下に示す浅水長波方程式を用いる.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u}h)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}h) + (\mathbf{u}h)\nabla \cdot \mathbf{u} + gh\nabla(h+z) = 0, \quad (2)$$

ここに,hは全水深, \mathbf{u} は断面平均流速,gは重力加速度, z は地盤高さである.

本研究では, Time Splitting 法により式 (1),(2) を移流 段階と非移流段階の2段階に分けて計算を行う⁵⁾.移流段 階の計算には CIVA 法³⁾を適用し,また非移流段階におい ては,安定化有限要素法⁴⁾を適用することで解を求める.

(2) 移動境界手法

移動境界手法として本研究では,複雑地形に対する適応性 に優れた非構造格子を用いた固定メッシュに基づく Euler 的手法を採用した. Euler 的手法とは,対象領域をあらか じめ要素分割しておき,各時間ステップにおいて各要素が 陸域か水域か判定することにより水際線を表現する方法で ある.

(3) CIVA法

CIVA 法³⁾は,移流方程式の高精度解析法である CIP 法を三角形要素に拡張した手法である.計算方法は移流方程 式の厳密解である式(3)を,上流側の要素内に張った3次 の補間曲面 (図-1) により求めるものである.

$$f^{n+1}(\mathbf{x},t) = f^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t), \qquad (3)$$



上流点の評価方法および面積座標

なお,三角形格子における上流側要素に対する高次補間多 項式は次式で定義される.

$$f(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1\\j \neq k}}^{3} \beta_{jk} (L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3), \quad (4)$$

ここで,座標値L_iは面積座標であり,部分三角形と全体の 三角形の面積 S の比 (S_i/S) で与えられる d は 1 次補間 の場合 0, 3 次補間の場合 1 となる $.\alpha_i$, β_{ik} は係数であり, 上流側の三角形要素の物理量 f とその空間微係数を用いる ことにより,以下のように定義される.

$$\alpha_i = f_i,\tag{5}$$

$$\beta_{jk} = f_j - f_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla f_j.$$
(6)

なお,微係数値は最小2乗法により求める.

3. 数値解析例

(1) 段波問題

本解析手法 (CIVA/S-FEM) の計算精度および有効性の 検討を行うため,段波問題を取り上げる.初期の波形図を 図-2 に示す.有限要素分割は三角形要素を使用し,節点数 303,要素数400,x方向分割幅0.1[m](100分割),y方向分 割幅 0.5[m](2 分割) である.境界条件としては,壁面にお いて slip 条件を与えた.また微小時間増分量は 0.01[sec] を 用いて計算を行った.



非移流段階を陽解法および陰解法で計算した場合の計算 結果と解析解との比較を行い,また従来の手法として,浅水 長波方程式のすべての項に対して SUPG 法に基づく安定化 有限要素法⁴⁾ (S-FEM) を適用した場合との比較を行った.

図-3は,1.0[sec]後における水面形状と流速分布の比較 である. CIVA/S-FEM よる計算結果は, S-FEM による計 算結果とほぼ同様の結果となっていることがわかる.これ

KeyWords : 安定化有限要素法, CIVA法, 移動境界問題

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: karaki2@civil.chuo-u.ac.jp

は CIVA/S-FEM も非移流段階において安定化有限要素法 を適用しているからであると考えられる.両手法とも,陽 解法において先端部で数値振動が発生し,特に流速分布に おいて顕著になっていることがわかる.一方,陰解法によ る計算結果は水位形状,流速分布ともに同部分での振動が 低減されており,良好な解が得られていることがわかる.



図-3 水面形状と流速分布の比較(保存型)

(2) 貯水池部分決壊問題

次に,本手法の移動境界問題への有効性を検討するため, 貯水池部分決壊問題を取り上げる.初期の貯水池の上面図 と側面図を図-4 に示す.



図-4 貯水池の初期図

x=0[m] には貯水槽と氾濫原を仕切る壁があり,中央部 -0.2[m] $\leq y \leq 0.2$ [m] の範囲が決壊部となる.また,点a-dは実験における測定点である.有限要素分割は三角形要素 を使用し,節点数 882,要素数 1608,x方向分割幅,y方向 分割幅ともに 0.1[m](40×20)分割である.境界条件として は,壁面において slip 条件を与えた.また微小時間増分量 は 0.001[s] を用いて計算を行った.計算結果と実験値との 比較を行い,また段波問題同様,CIVA/S-FEM と S-FEM のみを適用した場合の比較を行った.

図-5 は,浅水長波方程式に対して,CIVA/S-FEM および S-FEM のみをそれぞれ適用した時の,各測定点での水位の時刻歴の比較である.計算結果はおおむね実験値の傾向と一致していることがわかる.しかし,氾濫原の測定点 c,dでは,過小評価していることがわかる.CIVA/S-FEM による計算結果に比べ,S-FEMによる計算結果は水位の低 下が速くなっていることがわかる.また,両手法とも陽解 法による計算結果は陰解法による計算結果に比べ,水位を 大きく評価していることがわかる.



4. おわりに

本論文は,移動境界を考慮した浅水長波流れ解析手法として,CIVA/安定化有限要素法(CIVA/S-FEM)の提案を行った.本手法の有効性を検討するため,いくつかの数値 解析例に対して計算結果と解析解および実験値との比較を行った.その結果,以下の結論を得た.

- CIVA/S-FEMによる計算結果は,水面形状および流速分布において,従来のS-FEMによる計算結果と同様の解を与えた.また,陰解法による計算結果は先端部での振動が低減され,解析解との良い一致を示し有効性が確認された.
- 陽解法による計算結果は陰解法による計算結果に比べ,解を大きく評価することが確認された.また,陽 解法と陰解法とで解の精度に大きな差異は見られなかった.計算時間の観点から,実際問題への適用は 陽解法が有効であると言える.

今後の課題として,移動境界手法の検討が挙げられる.

参考文献

- 1) 横山洋,清水康行: CIP 法を用いた急勾配複断面蛇行水路の 数値計算,水工学論文集,45,pp601-606,2001.
- 川崎浩司,小野稔和, Napaporn PIAMSA-NGA, 熱田浩史, 中辻啓二: CIP 法と SMAC 法に基づく平面 2 次元氾濫流モ デルの構築,水工学論文集, 48, pp565-570, 2004.
- 3) 田中伸厚:数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の 開発,日本機会学会論文集(B編),64-620, pp103-110, 1998.
- Aliabadi,S.K., Tezduyar,T.E. : Space-time finite element computation of compressible flows involving moving boundaries and interface, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,107,pp209-223,1993.
- 5) 吉松弘行, 櫻庭雅明, 樫山和男: CIP-FEM による地すべり 地塊の運動シミュレーション, 地すべり学会研究発表会論文集 (印刷中)