

一次及び二次感度方程式による最適化手法の比較

(株)リブテック ○正会員 仙庭真司
(財)北海道河川防災研究センター フェロー 星 清
北海道工業大学土木工学科 フェロー 橋本識秀

1. はじめに

洪水流出過程を何らかの流出モデルで表現しようとする場合、実績洪水資料(雨量・流量系列)を用いて、計算値が実測値に最も適合するようにモデル定数を同定することが必要となる。効率よくモデル定数を推定するためには何らかの客観的基準に基づいた最適化手法が必要となる。

最も理解が容易で実用的な方法は、ニュートン法に代表される導関数を用いた手法であると言われている^{1),2)}。

本報告では、一般化貯留関数モデルを洪水流出モデルとして採用し、次の3種の最適化手法について検討を行う。

- (i) 一階ニュートン法(一次導関数利用)
- (ii) 二階ニュートン法(一次・二次導関数利用)
- (iii) ダビドン法(一次・二次導関数利用)

上記の3種類の最適化手法の適用にあたっては、感度方程式を導出して、導関数を解析的に算定している。

2. 一般化貯留関数モデル

一般化貯留関数モデルは次式で定義される。

$$s = k_{11}q^{p_1} + k_{12}d(q^{p_2})/dt, \quad ds/dt = r - q \quad (1)$$

ここで、 s :貯留高[mm]、 r :有効雨量[mm/h]、 q :直接流出高[mm/h]、 k_{11}, k_{12}, p_1, p_2 :モデル定数

式(1)中のモデル定数 k_{11}, k_{12}, p_1 及び p_2 は、次式で表わされる³⁾。

$$k_{11} = 2.8235 f_c A^{0.24}, \quad k_{12} = 0.2835 k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.4648, \quad f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6} \quad (2)$$

ここで、 A :流域面積[km²]、 $\bar{r}$:平均有効雨量強度[mm/h]、

表 - 1 各手法の特徴

最適化手法	特徴	必要な導関数	Δf_c の算定方法
一階ニュートン法	誤差項を一次テーラー展開する。 $e_m(f_c + \Delta f_c) = e_m(f_c) + \frac{\partial e_m(f_c)}{\partial f_c} \Delta f_c$	一次導関数	$\Delta f_c = - \sum_{m=1}^N \left(e_m \frac{\partial e_m}{\partial f_c} \right) / \sum_{m=1}^N \left(\frac{\partial e_m}{\partial f_c} \right)^2$
二階ニュートン法	誤差項を二次テーラー展開する。 $e_m(f_c + \Delta f_c) = e_m(f_c) + \frac{\partial e_m(f_c)}{\partial f_c} \Delta f_c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_m(f_c)}{\partial f_c^2} (\Delta f_c)^2$	一次・二次導関数	二次テーラー展開した誤差項を式(3)に代入した式からは Δf_c を算定できないため、ペイリー法により Δf_c を算定する。
ダビドン法	目的関数を二次テーラー展開する。 $J(f_c + \Delta f_c) = J(f_c) + \frac{\partial J(f_c)}{\partial f_c} \Delta f_c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(f_c)}{\partial f_c^2} (\Delta f_c)^2$	一次・二次導関数	$\Delta f_c = \sum_{m=1}^N \left(e_m \frac{\partial e_m}{\partial f_c} \right) / \sum_{m=1}^N \left(e_m \frac{\partial^2 e_m}{\partial f_c^2} + \left(\frac{\partial e_m}{\partial f_c} \right)^2 \right)$

表 - 2 一般化貯留関数法のシステム方程式と感度方程式

	システム方程式	一次感度方程式	二次感度方程式
変数	$x_1 = q^{p_2}, \quad x_2 = d(q^{p_2})/dt$	$u_1 = \partial x_1 / \partial f_c, \quad u_2 = \partial x_2 / \partial f_c$	$w_1 = \partial^2 x_1 / \partial f_c^2, \quad w_2 = \partial^2 x_2 / \partial f_c^2$
行列式	$\frac{dX}{dt} = AX + D, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$	$\frac{dU}{dt} = AU + B, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$	$\frac{dW}{dt} = AW + V, \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$
強制項	$d = f_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2$	$b = \frac{\partial f_2}{\partial f_c} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}$	v を表す式は複雑であるため、ここでは省略する。
離散式	$X_{m+1} = \Phi X_m + \Gamma D_m$	$U_{m+1} = \Phi U_m + \Gamma B_m$	$W_{m+1} = \Phi W_m + \Gamma V_m$

キーワード 貯留関数法、数学的最適化手法、感度方程式、導関数

連絡先 〒065-0018 北海道札幌市東区北18条東1丁目3番3号 (株)リブテック 011-722-0481

n :等価粗度[s/m^{1/3}]、 i :平均斜面勾配

従来、式(1)に含まれるモデル定数 k_{11} と k_{12} の最適化にあたっては、 k_{11} と k_{12} を一階ニュートン法により同時二次元探索を行ってきた。しかしながら、式(2)の関係式からわかるように、 f_c (通常1.0~2.0程度)の値が求められれば、 k_{11} 及び k_{12} の値が一義的に決定されることに着目し、本報告では f_c の一次元探索による最適化計算を行う。

3. 目的関数 J の設定

モデル定数の最適同定の評価基準としては、観測流量 q_m^* と計算流量 q_m との誤差 e_m の二乗平均MSEの最小化が用いられている。つまり、目的関数は次式で与えられる。

$$J = MSE = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{e_m(f_c)\}^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{q_m^* - q_m(f_c)\}^2 \quad (3)$$

現ステップでの定数値 f_c はすでに既知となっているから、次のステップでの値を計算するためにはモデル定数の補正項 Δf_c をいかに効率よく算定するかが最適化手法の主要課題となる。そこで、最適化計算における繰返し計算を終了させる条件は、次の収束条件を満たした時点とする。

$$|\Delta f_c / f_c| < \varepsilon \quad (4)$$

ここで、 ε は収束許容限界値(通常 $10^{-3} \sim 10^{-4}$)である。

3.1 各手法による補正項 Δf_c の算定方法

3種類の最適化手法の特徴を、表-1に表記する。いずれの手法も誤差に関する導関数を必要とする。表中の $\partial e_m / \partial f_c$ は一次導関数、 $\partial^2 e_m / \partial f_c^2$ は二次導関数である。

4. 一般化貯留関数法及び感度方程式の数値解法
式(1)で表わされる一般化貯留関数モデルのシステム方程式及びその感度方程式の解法を表 - 2 に表記する。
このとき、式(1)は次の連立非線形微分方程式に変換される。

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_2) \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_{11}, k_{12}) \quad (5)$$

ここに、 $f_1(\cdot)$ と $f_2(\cdot)$ は関数である。表 - 2 中の f_2 は式(5)に示される関数 $f_2(\cdot)$ に対応する。また、式(5)の数値解法には線形近似化を用いた。

5. 実洪水資料による最適化計算の比較
解析例として、表 - 3 に要約して示す3個の洪水を選定した。これらの洪水は2山ピークを有することが特徴である。
表 - 4 には、最適化結果を比較するための精度評価指標式、表 - 5 には、洪水例における最適化結果と精度評価指標が示されている。その結果を要約して以下に述べる。

表 - 3 解析データにおける流域特性及び洪水特性

信濃川・笠堀ダム(70 km ²)	S63.7.9	H7.7.19	H7.8.1
ピーク流量[m ³ /s]	231.30	145.66	236.63
比流量	3.3043	2.0809	3.3804
平均有効雨量強度[mm/h]	4.6188	2.8746	3.9686
流出率	0.5173	0.7156	0.6318

表 - 5 解析結果

探索法	S63.7.9		H7.7.19		H7.8.1	
	一次元	二次元	一次元	二次元	一次元	二次元
実測ピーク流量	231.30		145.66		236.63	
計算ピーク流量	218.10	206.70	131.98	127.06	262.07	236.00
f_c の初期値	1.0		1.0		1.0	
最適値 f_c	0.96	-	1.10	-	0.86	-
最適値 k_{11}	7.48	9.02	8.64	8.65	6.76	8.50
最適値 k_{12}	10.58	5.23	16.02	16.03	9.00	4.75
一階 N 法	6 回	7 回	6 回	30 回	10 回	20 回
二階 N 法	4 回	8 回	5 回	5 回	5 回	5 回
ダビドン法	4 回	8 回	5 回	5 回	5 回	×
MSE	0.924	0.627	0.427	0.402	1.233	0.814
J_{re}	0.388	0.339	0.294	0.267	1.257	0.972
E	0.008	0.005	0.011	0.010	0.009	0.006
E_v	0.014	0.026	0.015	0.019	0.013	0.024
E_p	0.063	0.122	0.112	0.151	-0.114	0.003

表 - 4 精度評価指標式

指標	J_{re}	E	E_v	E_p
数式	$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{ q_{om} - q_{cm} }{q_{om}}$	$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{q_{om} - q_{cm}}{q_{op}} \right\}^2$	$\frac{\sum_{m=1}^N q_{om} - \sum_{m=1}^N q_{cm}}{\sum_{m=1}^N q_{om}}$	$\frac{q_{op} - q_{cp}}{q_{op}}$

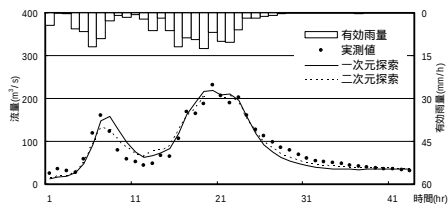


図 - 1 昭和 63 年 7 月 9 日洪水例

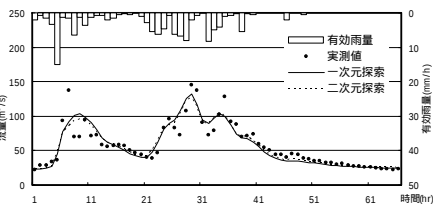


図 - 2 平成 7 年 7 月 19 日洪水例

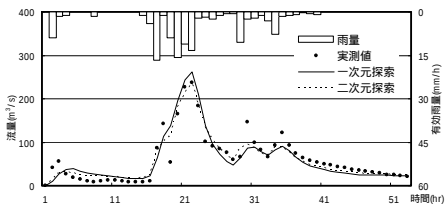


図 - 3 平成 7 年 8 月 1 日洪水例

ここで、 q_{om} : 実測流出高[mm/h]、 q_{cm} : 計算流出高[mm/h]、 q_{op} : 実測ピーク流出高[mm/h]、 q_{cp} : 計算ピーク流出高[mm/h]、 N : データ数

6. まとめに
- (a) 3種の最適化手法のうち、同時二次元探索において、一階ニュートン法で発散、ダビドン法で解が得られないケースが見られた。一次元探索では3種の最適化手法で解が得られている。収束した例では、二次微係数を用いる二階ニュートン法とダビドン法で繰り返し計算回数が少なくなる傾向が見られる。
 - (b) ハイドログラフの相対誤差を表す J_{re} 及びピーク流量に対するハイドログラフの誤差を表す E は一次元・二次元探索において同程度ある。
 - (c) 全流出量のボリュームに関する相対誤差 E_v は、一次元探索の方が同時二次元探索に比べて小さい。
 - (d) 一次元探索による計算ピーク流量は、同時二次元探索によるピーク流量よりも大きくなる傾向にある。ピーク流量の相対誤差 E_p は、2洪水例において、一次元探索の方が小さい。すなわち、 f_c の一次元探索による最適化の方がピーク流量の再現がよい傾向にある。
 - (e) 図 - 1 から図 - 3 には、3洪水例における実測ハイドログラフと計算ハイドログラフを比較して示す。一次元探索における再現計算も実用性十分な精度を有しており、実用性が高いと考えられる。
 - (f) 一次元探索は、同定すべきモデル定数が1個であるために、最適化計算は同時二次元探索に比べると容易である。今後、多数の洪水例での検証が必要となる。

最後に、洪水資料の提供をいただいた国土交通省に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Gupta, V.K.and Sorooshian, S.: The automatic calibration of conceptual catchment models using derivative-based optimization algorithms, Water Resources Research, 21(4), pp.473-485, 1985.
- 2) (財)北海道河川防災研究センター・編集・発行：一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法, 152p., 2001.
- 3) 北海道開発土木試験所・河川研究室：実用的な洪水流出計算法、北海道開発土木試験所, 185p., 1987.