

## 地盤統計学を基に疑似生成した観測データの利用による透水係数分布同定

京都大学防災研究所 正会員 ○ 浜口 俊雄  
 京都大学防災研究所 正会員 中北 英一

## 1. 序論

地下水解析では、水位観測データを用いて地下水モデルを決定したのち考察に入る。その際、解析の再現精度を上げるためには透水係数などの物性値の空間分布を出来るだけ良好な設定にせねばならない。しかし観測データには量と質があって、それに応じた物性分布設定のモデルでなければ解析の再現性が損なわれる。細か過ぎる分布設定では、データの質にも依るが全ての観測点から比較的遠い局所域では再現性の良くない結果になる可能性がある。逆に粗過ぎる設定では、積分平均挙動が合わさった再現結果となる可能性がある。試行錯誤ないしは逆解析によって物性分布を定める際の順解析キャリブレーションは上記を折衷する解析設定を模索していると言ってよい。

いま議論を簡素化すべく、有効間隙率一定として不均一な透水係数分布を同定対象に絞る。所与の水位観測条件（数量・質・配置など）に対して求める透水係数の区域数が多い場合、非適切な (ill-posed) 逆解析条件となる。これに対し、筆者は水位や透水係数分布の先験情報や事前情報を逆解析時に活用する解決策<sup>1), 2)</sup>や分布を地盤統計モデル化するという解決策を提案している<sup>3), 4)</sup>。他には実存の観測点を出来る限り増設するといった物理的解決策しかないが、本稿では観測点増設を考えない代りに観測点を擬似的に生成して増加させる手法を提案し、その分布の推定精度について検討する。

## 2. 地盤統計学による水位観測データ生成

本稿の逆解析では平面不圧地下水モデルを考え、さらに、基礎方程式には線形化した式 (1) を用いる。この式の有限要素方程式として式 (2)～(5) が得られ、これを境界条件の水位で縮約した後に次時刻水位に関して解くと式 (6) のようになる。その逆解析の前段階として、数箇所の観測点から得られる水位観測データを基にして、地盤統計学の一手法である Ordinary kriging (OK) を用いることで、式 (6)～(8) に掲げる任意位置の水位を時間ステップ毎に推定していく。ここに採用した共分散関数は式 (9) の球型関数である。

本稿では、OK 推定で得られた観測位置以外の計算点上の水位を観測値と見なし、全計算点において観測水位が存在する状況を擬似的に作り出して、観測データの量を増やしたかたちにするという方法を提案する。データ同化手法と違い、物理モデルから求めて同化していった求めた値でないため、計算が容易で、物理モデルの影響がないデータとなり、同じモデルを使う逆解析の観測値として適切であると言える。ところで逆解析時の未知数は求めるべき透水係数の区域数であるので、上記の疑

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k d_0 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k d_0 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \varepsilon \quad (1)$$

( $\lambda$ : 有効間隙率,  $h$ : 水位,  $k$ : 透水係数,  
 $d_0$ : 平均水深,  $\varepsilon$ : 涵養量)

$$A h_{t+1} = B h_t + \omega_{t+\theta} \quad (2)$$

(注: 両辺は境界水位で縮約済)

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \theta S, \quad B = \frac{1}{\Delta t} M - (1 - \theta) S, \quad (3)$$

$$M = \int_V \lambda \phi^T \phi dV, \quad S = \int_V k d_0 \frac{\partial \phi^T}{\partial z_i} \frac{\partial \phi}{\partial z_i} dV, \quad (4)$$

$$\omega_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \phi^T dS + \int_V \varepsilon \phi^T dV \quad (5)$$

$$h_{t+1} = A^{-1} (B h_t + \omega_{t+\theta}) \quad (6)$$

$$h^*(x) = \hat{h}_0 + c(x)^T C^{-1} \hat{w} \quad (7)$$

$$\text{ただし, } \hat{h}_0 = \frac{\alpha^T C^{-1} \phi}{\alpha^T C^{-1} \alpha}, \quad \hat{w} = \phi - \alpha \hat{h}_0 \quad (8)$$

ここに、 $\hat{h}_0$ : トレンド定数 (ドリフト),  $\hat{w}$ : 観測点でのランダム成分ベクトル,  $\alpha$ : 成分が全て1の定数ベクトル,  $\phi$ : 観測値ベクトル,  $c(x)$ : 求める推定点  $x$  と各観測点間の共分散ベクトル,  $C$ : 各観測点間の  $w(x)$  の共分散行列。

$$C(d) = \begin{cases} \sigma^2 \left\{ 1 - 1.5 \left( \frac{d}{a} \right) + 0.5 \left( \frac{d}{a} \right)^3 \right\} & (0 \leq d \leq a) \\ 0 & (d > a) \end{cases} \quad (9)$$

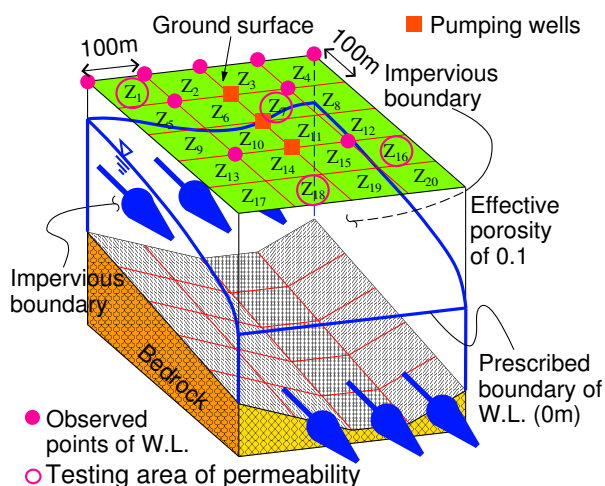


図 1: 仮想帯水層

似観測データ生成により、「未知数＞観測数」という非適切な条件下での逆解析が回避でき、同分布の一意解が得られることになる。

### 3. 数値実験

ここで提案した擬似観測データの生成による逆解析結果への影響について検討すべく、図1のような不圧地下水の流れる仮想帯水層を対象として数値実験を行った。この帯水層の不透水基盤面は、流れ断面が谷状になっており、流下方向には一定傾斜している。図中の○印は元の水位観測点(9点), □印は揚水位置(3点)で、最下流端部は0mの水位境界である。また図の上流端(地下水集水域)と地表面からの地下水涵養があるものと設定した。本稿の逆解析手法には、事前情報を利用し、かつ、観測データの質を逐次検討して同定結果に反映できる拡張Kalmanフィルタ有限要素法<sup>1), 2)</sup>を採用することにした。OK推定時に得られる推定誤差共分散行列はこの拡張Kalmanフィルタ有限要素法と同じ構造であるので、同行列を引き続き使用できる事も利点である。

本実験に用いる真の透水係数分布は図2の様に設定した。まず、水位観測データに当初のまま9箇所から順解析で得られる模擬データを用いて、各区域毎(未知数20個)に同定を行ったところ、図3に記したような結果となった。観測点に近い区域と距離のある区域とでは解の精度に差が出ており、未知数に対する観測数の少なさという非適切条件の影響と局所的な観測更新感度の鈍さが出ていていることが見て取れる。続いて、本提案によって全計算点を観測位置とすべく、OK推定によって水位の疑似観測データを生成した。疑似観測データ生成時の、式(9)の相関距離 $a$ と空間分散値 $\sigma^2$ の時間変化を図4に表す。今回の場合、 $\sigma^2$ が小さいことからトレンド値 $h_0$ への依存度は比較的大きいことがわかる。また $\sigma^2$ はほぼ4000以上になっていることからランダム成分は全域に影響を与えながら求まっていることがわかる。得られた疑似生成観測データを用いて同様に各区域毎の透水係数同定を行った。その同定結果を図3に示す。これは真の分布と比較しても比較的精度の良い結果となっている。推定精度が良くない場所は $Z_6, Z_7, Z_8, Z_{10}, Z_{11}, Z_{12}$ であるが、この辺りは揚水位置に比較的近くで水深の浅い場所である。OK推定された水位分布が揚水による変化(局所変動)を表せずにやや過大となったため、それを疑似生成観測データとした同定結果が大きな値となってしまったと推察される。それを除けば図3とは比較にならない程に推定精度が向上していることがわかる。

### 4. 結論

本提案ではOK推定することで水位の疑似観測データを生成し、それを用いることで一意的で精度の良い透水係数分布の同定結果を得た。こうした手法も物性値分布の同定精度向上に秀逸な手法であるといえる。

#### 参考文献

- 1) 例えば、長谷川高士, 村上 章, 浜口俊雄: 拡張Kalmanフィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/III-29, 1994. 2) 浜口俊雄, 村上 章, 長谷川高士: 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/III-39, pp.133-145, 1997. 3) 浜口俊雄: 透水係数を変量とした地下水位変分法の厳密解と透水係数の不均一分布構造の同定, 水工学論文集第48巻, 土木学会水工学委員会, pp.361-366, 2004. 4) 浜口俊雄: 分布モデル化による透水係数同定問題の非適切性克服と解の観測更新感度向上, 水工学論文集第49巻, 土木学会水工学委員会, pp.109-114, 2005.

|       |                       |                       |                          |                          |                          |
|-------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Exact | 215.3322<br>( $Z_4$ ) | 255.5558<br>( $Z_8$ ) | 321.1791<br>( $Z_{12}$ ) | 400.0000<br>( $Z_{16}$ ) | 383.3276<br>( $Z_{20}$ ) |
|       | 173.9983<br>( $Z_3$ ) | 200.0000<br>( $Z_7$ ) | 272.5400<br>( $Z_{11}$ ) | 329.4123<br>( $Z_{15}$ ) | 346.6049<br>( $Z_{19}$ ) |
|       | 136.6654<br>( $Z_2$ ) | 171.4817<br>( $Z_6$ ) | 226.1393<br>( $Z_{10}$ ) | 273.9904<br>( $Z_{14}$ ) | 300.0000<br>( $Z_{18}$ ) |
|       | 100.0000<br>( $Z_1$ ) | 146.4934<br>( $Z_5$ ) | 194.3980<br>( $Z_9$ )    | 235.9593<br>( $Z_{13}$ ) | 265.2360<br>( $Z_{17}$ ) |

Unit: m/day

図2: 真の透水係数空間分布

|              |                       |                       |                          |                          |                          |
|--------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Piece-wisely | 219.3408<br>( $Z_4$ ) | 263.1140<br>( $Z_8$ ) | 289.9044<br>( $Z_{12}$ ) | 382.6352<br>( $Z_{16}$ ) | 380.4207<br>( $Z_{20}$ ) |
|              | 168.8113<br>( $Z_3$ ) | 224.7142<br>( $Z_7$ ) | 254.9413<br>( $Z_{11}$ ) | 348.1349<br>( $Z_{15}$ ) | 352.3683<br>( $Z_{19}$ ) |
|              | 135.8332<br>( $Z_2$ ) | 185.8441<br>( $Z_6$ ) | 215.4022<br>( $Z_{10}$ ) | 273.9089<br>( $Z_{14}$ ) | 295.5448<br>( $Z_{18}$ ) |
|              | 101.7502<br>( $Z_1$ ) | 144.2885<br>( $Z_5$ ) | 180.1621<br>( $Z_9$ )    | 237.3977<br>( $Z_{13}$ ) | 260.8399<br>( $Z_{17}$ ) |

Unit: m/day

図3: 分布同定結果(元の観測データ使用)

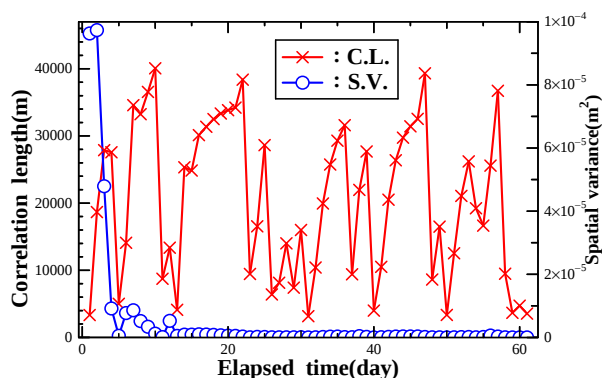


図4: 相関距離と空間分散値の時間変化

|                      |                       |                       |                          |                          |                          |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Using synthetic data | 219.3378<br>( $Z_4$ ) | 263.3715<br>( $Z_8$ ) | 290.3026<br>( $Z_{12}$ ) | 383.2521<br>( $Z_{16}$ ) | 381.1754<br>( $Z_{20}$ ) |
|                      | 168.8896<br>( $Z_3$ ) | 224.4939<br>( $Z_7$ ) | 254.5708<br>( $Z_{11}$ ) | 347.1259<br>( $Z_{15}$ ) | 351.0596<br>( $Z_{19}$ ) |
|                      | 135.8147<br>( $Z_2$ ) | 185.9866<br>( $Z_6$ ) | 215.6820<br>( $Z_{10}$ ) | 274.6058<br>( $Z_{14}$ ) | 296.4615<br>( $Z_{18}$ ) |
|                      | 101.7642<br>( $Z_1$ ) | 144.2815<br>( $Z_5$ ) | 180.1305<br>( $Z_9$ )    | 237.2620<br>( $Z_{13}$ ) | 260.6362<br>( $Z_{17}$ ) |

Unit: m/day

図5: 分布同定結果(疑似生成観測データ使用)