

MCMCを用いた鋼製橋脚の信頼性評価

中央大学大学院 ○学生員 太田 浩輔
中央大学 正会員 佐藤 尚次

1. はじめに

性能設計に際し、信頼性手法の活用は有効な手段である。そのため、効率的な破壊確率算出は重要なテーマである。破壊確率の算出方法に、一般性があるモンテカルロシミュレーション法(以下、MCS と記す)がある。しかし、破壊確率の小さい低損傷確率の場合、多くの計算時間がかかるという問題点がある。そこで、損傷に対して危険な部分空間を自動的に設定し、その空間内へマルコフチェインモンテカルロシミュレーション(以下、MCMC と記す)を用いてサンプルを発生させる方法が提案されている。

本研究では既往の研究¹⁾をもとにMCMCを鋼製橋脚の荷重組合せ問題に適用した例を示す。

2. Subset-MCMC 法¹⁾

2.1 Subset 法

損傷領域を F とし、損傷確率を $P(F)$ と表す。ここで、全体集合を F_0 、その部分集合を F_i と表し、 $F_m = F$ とするとそれぞれの部分集合(Subset)は以下のように示すことができる。

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_m = F \quad \dots(2.1)$$

この時、損傷確率はこれらの部分集合を用いることにより次式で算定できる。

$$P(F) = P(F_m) \\ = P(F_m / F_{m-1}) P(F_{m-1} / F_{m-2}) \dots P(F_1 / F_0) \quad \dots(2.2)$$

2.2 Subset-MCMC 法による損傷確率の算出手順

図-1 に subset 法を用いた損傷確率算出の概念図を示す。

- (1) 確率分布に従うサンプルを N_t 個発生させ、限界状態関数に代入し限界状態関数を算出する。
- (2) 限界状態面に近いサンプルから順に並べ $z_1, z_2, z_3, \dots$ とする。 $P(F_{k+1}|F_k) = N_s/N_t$ となる部分空間 F_{k+1} を次式で定義する。

$$F_{k+1} = \left\{ x \mid z(x) < \frac{z_{n_s} + z_{n_{s+1}}}{2} \right\} \quad \dots(2.3)$$

- (3) (2)で採択された x_k を用い、任意の確率密度関数 $q(x'|x_k)$ から新たにサンプルを生成させる。MCMC の定式化上、一様分布に従う変数 u とすると $q(x'|x_k)$ は

$$q(u'/u_k) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & uk - a < u' < uk + a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots(2.4)$$

となり、 a は任意の数である。

- (4) 採択率 $\alpha(x', x_k)$ を算出し、確率 α で $x_{k+1} = x'$ 、確率 $1 - \alpha$ で $x_{k+1} = x_k$ とする。採択率 α は(3)から以下の式で定義される。

$$\alpha(x'; x_k) = \min\{1, I_{(0,1)}(u') I_{Fi}(u')\} \quad \dots(2.5)$$

$I_{(0,1)}(u')$ は定義域を 0 から 1 の間とする一様分布、 $I_{Fi}(u')$ は x が部分空間 F_i の内にある場合には 1、外にある場合には 0 となる関数。

- (5) 部分空間 F_{k+1} 内に N_t 個のサンプルを発生させる。
- (6) 損傷が生じる ($z < 0$) サンプル個数 N_f が十分な場合には終了 ($N_t > N_f > N_s$)。そうでない場合には(2)にもどる。

以上の手順により、 m 番目の部分集合内に破壊に至る N_f 個のサンプルが得られた場合には次式によって損傷確率を算出できる。

$$P(z < 0) = \left(\frac{N_s}{N_t} \right)^m \frac{N_f}{N_t} \quad \dots(2.6)$$

N_s は部分空間の大きさを決めるパラメータである。上記の(3)、(4)が MCMC の概要である。

このようにサンプル数 N_t や N_s を決める指標はなく、算出する人の経験で決めることになり、MCMC で用いる任意の確率密度関数 $q(x'|x_k)$ も自由に選ぶことになる。

3. 鋼製橋脚の荷重組合せ問題への適用例

3.1 対象モデル

本研究では既往の研究⁴⁾を基にMCMCを鋼製橋脚の荷重組合せ問題に適用した例を示す。選定した構造物は三径間連続桁の中間橋脚を簡略化し図-2 のようにモデル化した。設定した構造モデルの各諸元は表-1 にまとめて示す。また板厚は表-2 に示す。計算を簡単にする

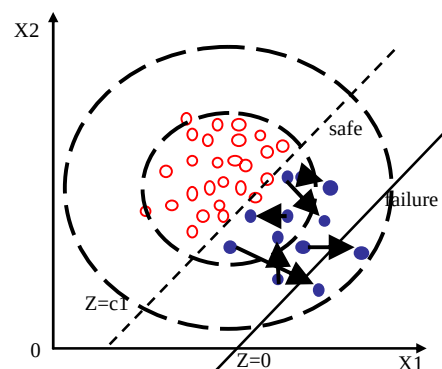


図-1 subset 法の考え方

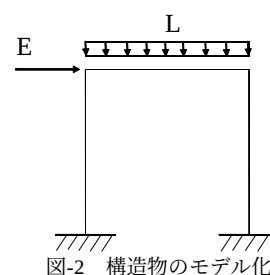


図-2 構造物のモデル化

表-1 構造モデルの各諸

(単位:m)

支間長 L	40.00
橋脚全高 H	10.00
橋脚全幅 B	20.00
橋脚高さ h	9.14
橋脚幅 l	18.28
梁柱幅 a	1.72

表-2 板厚算出結果

(単位:mm)

柱基部 t1	22
柱上部 t2	31
梁隅角部 t3	28
梁中央部 t4	21

キーワード：構造信頼性、マルコフ連鎖モンテカルロ法、荷重組合せ、効率化

連絡先：〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部土木工学科 tel.03-3817-1816 fax.03-3817-1803

ために、断面形状は補剛材を有しない正方形断面とした。

3.2 確率変数

活荷重、地震荷重を確率変数とし、その他は確定値とした。確率分布関数を以下に示す。

(1) 活荷重

Weibull 分布

$$F_x(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - 111.0}{611.038206} \right)^{1.612} \right] \quad \cdots(3.1)$$

($x > 111.0$ 単位 kN)

(2) 地震荷重

$$F_E(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - 41.28}{34.24} \right)^{0.913} \right] \quad \cdots(3.2)$$

($x > 41.28$ 単位 Gal)

3.3 限界状態の設定

限界状態関数として終局限界状態の横倒れ座屈を考慮した。照査式は以下に示す。 $Z < 0$ の時、破壊となる。

$$Z = 1 - \left(\frac{P}{P_{cu}} + \frac{M}{M_{cu} \left(1 - \frac{\nu P}{P_{cr}} \right)} \right) \quad Z < 0 : \text{failure} \quad \cdots(3.3)$$

ν : 安全率 1.7、 P : 軸方向力(kN)、 M : 作用する曲げモーメント(kN・m)、 P_{cu} : 断面の圧縮耐力(kN)、 M_{cu} : それぞれ照査する断面の圧縮側の終局曲げモーメント(kN・m)、 P_{cr} : オイラー座屈荷重(kN)

3.4 信頼性評価

MCS で破壊確率の算出を行った既往の研究⁴⁾では、100万回の繰返し計算を必要とし、計算効率が悪い。今回、同様の条件で MCMC を適用し、MCS の結果と比較し精度の確認を行った。なお、本研究では一番厳しい条件の橋脚の基部に着目した。MCMC を行うに際し、全サンプル数 N_t を 100、1000 の 2 通りとし、式(2.4)の MCMC におけるサンプル発生の幅 a と部分空間を決定する変数 N_s もいくつかのパターンを行うことを考えた。以上の条件より、まずサンプルサイズ N_t 回の MCS を行い、それより Subset を定義し、MCMC を行い $N_t \geq N_s$ となったら計算を終了する。

解析結果を表-3 に示す。最終 subset は $N_t \geq N_s$ となったときの subset 数である。また「-」となっているところ

表-3 解析結果

ケース	N_t	N_s	a	最終subset	破壊確率
①	100	50	0.00005	-	-
②		20	0.00005	-	-
③		10	0.00005	-	-
④		5	0.00005	8	6.25E-11
⑤		5	0.005	-	-
⑥		5	0.000001	-	-
⑦	1000	5	0.00005	3	1.45E-06
⑧		10	0.00005	3	5.00E-06
⑨		20	0.00005	4	5.52E-07
⑩		50	0.00005	6	2.25E-08
⑪		100	0.00005	-	-
⑫		5	0.000001	-	-
⑬		5	0.0001	3	8.50E-07
⑭		5	0.005	-	-

は、今回の計算打ち切り基準である $N_t \geq N_s$ に至らなかったケースである。つまり、うまく subset を絞れなく破壊領域に点を落とせなかった場合である。

解析結果より、繰返し回数 100 万回の MCS を行った既往の研究⁴⁾の解析解である 1.00E-06 とほぼ同じ解を出しているケースがあるのがわかる。やはり、任意で設定する N_t 、 N_s 、 a の組合せで解の精度は大きく違ってくることがわかる。一番影響が考えられるのは MCMC での式(2.4)で u' を発生させる時、その u' に対応する x' が破壊領域から遠ざかったとしても式(2.5)より、部分空間 F_i の内にある場合には必ず採択される。そのため式(2.3)から、部分空間の設定より、 N_s が大きい値の時、破壊領域にサンプルを散らすところまでたどり着けず、計算打ち切り基準である $N_t \geq N_s$ に至らなかったケースである。ケース①、⑪がそれに当たると考えられる。

4. おわりに

効率的な破壊確率算出の方法として Subset-MCMC 法を荷重組合せ問題に適用した例を示した。

- (1) 本研究の場合、 $N_t=1000$ 、 $N_s=5$ 、 $a=0.00005$ の場合に精度のよい解が得られた。MCS での破壊確率は 1.00E-06 となっており、ほぼ等しい。
- (2) $N_t=1000$ と $N_t=100$ を比較すると、 $N_t=1000$ の場合、破壊領域にサンプルされているケースが多いことより、初期サンプル数と精度は関係があるのではないかと推測できる。
- (3) N_s は全サンプル数から MCMC の初期値の個数決定には重要であり、部分空間の定義にも影響がある。本研究の場合 N_s は小さいほうが限界状態関数値 Z が小さい(エリート度の高い)サンプルを採用しているので有効であるといえる。
- (4) MCMC におけるサンプル発生幅 a について、大きくても、小さくてもいけないことがわかる。 A を大きくすると部分空間に点が落ちる確率が小さくなるので採択されないサンプルを発生させることになり、 a が小さいとサンプル発生幅が小さいので計算効率が悪い。本研究では、すべてのケースに対して $a=0.00005$ の時、精度のよい解が得られている。

本研究では各部分空間のサンプル数 N_t 、部分空間の大きさを決めるパラメータ N_s 、MCMC におけるサンプル発生の幅 a の 3 つのパラメータについて、いろいろな組合せをし、破壊確率の比較を行ったが、正解に到達する組合せは稀であった。そのため、パラメータによらず正解に近づけるためには、更なる検討が必要である。

参考文献：

- 1) 吉田郁政、鈴木修一：MCMC を用いた低損傷確率の算出、第 10 回信頼性設計技術ワークショップ、2003 年 8 月
- 2) 大西教文、本城勇介、Amatya Shailendra、三輪宏和：Subset Markov Chain Monte Carlo Simulation による信頼性解析の開発、土木学会第 59 回年次講演会、2004 年 9 月
- 3) 星谷勝・石井清、構造物の信頼性設計法、鹿島出版会、1986 年 5 月
- 4) 太田浩輔、佐藤尚次：荷重組合せ問題における Turkstra 則効果のモンテカルロ法による確認、土木学会第 59 回年次講演会、2004 年 9 月