

対称構造系における Scaled Corrector 法の高精度化と分岐解析法の提案

東北大学 学生会員 柳本 彰仁
東北大学 正員 池田 清宏

1. はじめに

構造系の分岐解析において、接線剛性行列の固有値解析を行うことにより、分岐点を判別し、分岐モードを抽出している。しかし、固有値解析は大規模構造系において大きな計算容量と計算時間を要するため、可能であれば回避したいボトルネックである。

野口・久田¹⁾は、分岐点における固有方程式と収束前後の Newton-Rhapson 法による反復解法式の類似性に着目し、分岐点周辺で Scaled Correror (変位修正ベクトル) によって分岐モードを近似できることを発見した。しかし、著者らが、対称性をもつ構造物に対して Scaled Corrector 法を適用した結果、得られる分岐モードの精度が低いことに加えて、2重分岐点には適用できないなどの問題点を有することが判明した。

そこで、本研究では、対称性を持つ構造物に対して、Scaled Corrector 法に群論的分岐理論、ブロック対角化理論、離散化フーリエ級数の考えを組み込むことによって、より精確な分岐モードを抽出でき、固有値解析を要しない効率的な分岐解析手法を提案する。

2. Scaled Corrector 法

離散的な構造系の接線剛性行列 K の逆行列は、固有値 λ_j と固有ベクトル Φ_j ($j = 1, \dots, n$) を用いて、

$$K^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \Phi_j (\Phi_j)^T \quad (0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n) \quad (1)$$

と展開できる。この中の最小固有値 λ_1 が 0 に漸近すると、 $1/\lambda_1$ が非常に大きくなるため、 K^{-1} は十分な精度で、以下のように近似できる。

$$K^{-1} \simeq \frac{1}{\lambda_1} \Phi_1 (\Phi_1)^T \quad (2)$$

Newton-Rhapson 法の修正子計算は、修正子 $(\delta u, \delta \Lambda)$ 、荷重ベクトル p 、残差ベクトル $E(u, \Lambda)$ に対して、

$$K \delta u - \delta \Lambda p = -E(u, \Lambda) \quad (3)$$

という反復計算を行い、ノルム $\|E\|$ が小さくなるまで繰り返すものである。式 (2)、式 (3) より

$$\delta u \simeq \{(\Phi_1)^T (\delta \Lambda p - E(u, \Lambda)) / \lambda_1\} \Phi_1 \quad (4)$$

であるので、修正子 δu は近似的に Φ_1 と同じ方向を表していることが分かる。この修正子 δu を正規化したもの、それが Scaled Corrector Φ^{sc} である。

3. 対称性と解空間のブロック分解

対称性を持つ構造物は、並進・回転・鏡映などの対称性で構成される群によりその対称性を表すことができる。群は部分群を持ち、部分群は座屈モードの対称性を表す²⁾。この性質を利用したブロック対角化理論³⁾により、系の支配方程式を独立した式に分解でき、座屈モードの分類を行うことができる。

適用例として、図 2 に示す正六角形状節点を持つトラスドームについて考える。このドームの正六角形状節点の解空間は、離散化フーリエ級数展開により 18 個のベクトルを基底ベクトルとして取ることができる (図 1 に基底ベクトルの xy 方向成分を示す)。この基底ベクトルを対称性により分類すると

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_6 : \text{正六角形状} & D_3 : 3 \text{ 軸対称} (x \text{ 軸含む}) \\ D_3^2 : 3 \text{ 軸対称} (y \text{ 軸含む}) & D_2 : 2 \text{ 軸対称} \\ D_1 : x \text{ 軸対称} & D_1^4 : y \text{ 軸対称} \\ C_6 : 60 \text{ 度の回転対称} & C_2 : 180 \text{ 度の回転対称} \end{array} \right. \quad (5)$$

という 8 つの部分群に対応する部分空間に分解できる。これがブロック対角化による分解に対応している。

この部分空間ごとに Scaled Corrector Φ^{sc} をブロック分解すると、式 (5) に対応する 8 つのベクトル

Φ_μ ($\mu = D_6, D_3, D_3^2, D_2, D_1, D_1^4, C_6, C_2$) (6) に分解できる。主経路の変形モードを示す Φ_{D_6} を除く、残りの 7 つのベクトルは、分岐モードに対応している。

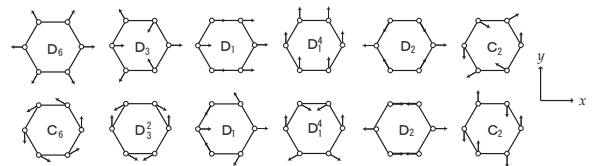


図-1 離散化フーリエ変換が表す変形モード (xy 方向)

4. 固有値解析を用いない分岐点探索法

本研究では接線剛性行列 K の標準固有値問題

$$K \Phi = \lambda \Phi \quad (7)$$

をもとに、下記の 2 つの固有値解析を用いない分岐点探索法を提案する。

(α) 式 (7) より、ある部分群 μ に対して、次式が成立。

$$(\Phi_\mu)^T K \Phi_\mu = \lambda_\mu \quad (\mu = D_6, D_3, D_3^2, D_2, \dots) \quad (8)$$

そこで、分岐点を λ_μ が 0 になる点として探索する。

Key Words: 対称構造系, 分岐解析, Scaled Corrector 法, 群, ブロック分解, 離散化フーリエ級数

〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06

(β) 式 (7) より, 分岐点では $K\Phi = 0$ となる性質利用し, ある部分群 μ に対し, ベクトル E_μ を

$K\Phi_\mu = E_\mu = \|E_\mu\| \cdot E_\mu / \|E_\mu\|$ ($\mu = D_6, \dots$) (9) と定義し, 擬似固有値 λ_μ^* を $\lambda_\mu^* = s\|E_\mu\|$ と定義する (s は $\Phi_\mu \cdot E_\mu$ の符号を表す). そこで, 分岐点を λ_μ^* が 0 になる点として探索する.

(α), (β) の方法はともに, 分岐点を探すのみでなく, 分岐点の分岐モードに対応する Φ_μ も特定できる.

5. 解析結果と考察

解析対象として図 2 に示すトラスドームを取り上げる. このドームの分岐解析により図 3 の荷重変位曲線と, その曲線上の単純分岐点 A, 2 重分岐点 B と C が得られた. 以下, これらの分岐点の位置の精度と, 分岐モードに対応する Φ_μ の精度を評価する.

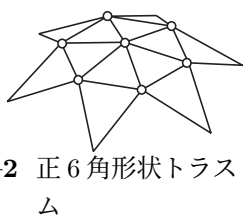


図-2 正六角形状トラスドーム

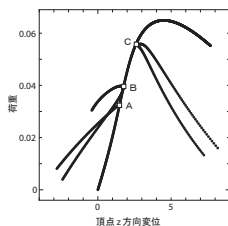


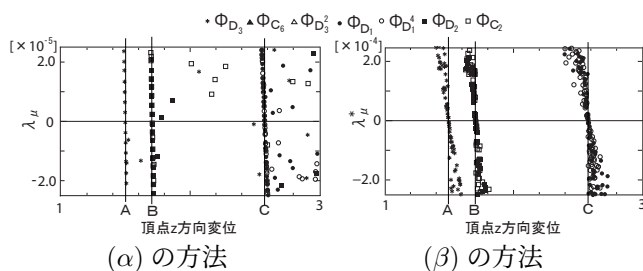
図-3 荷重変位曲線

(1) 分岐点探索法の比較

図 4 に分岐探索法 (α) と (β) の結果を示す. (α) は縦軸に λ_μ を, (β) は λ_μ^* を縦軸とし, いずれの図も縦軸の変数が 0 となる点を分岐点と判断し, 図中 A, B, C は別途固有値解析によって求めた分岐点の位置を示す.

いずれの方法でも縦軸の変数の値が正から負へと移行する点である分岐点を見つけることができ, また 7 つのベクトルの中でどのベクトルが分岐モードとなるかも確認できた.

(α) の方法は, 値はばらついているものの, 分岐点近傍では直線的に分岐点に近づくため, 分岐点の正確な位置が判断しやすい. (β) の方法は振動しながら分岐点に近づくため, 分岐点の精算には向かないが, 値のばらつきが全体的にないため, 分岐点のおおよその位置の把握に適している. したがって, 実解析においては両者を併用するのが望ましい.



(α) の方法

(β) の方法

図-4 分岐点探索結果

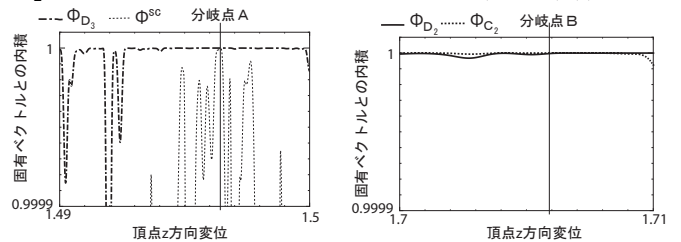
(2) 分岐点周辺における分岐モードとの精度比較

本手法による分岐モード Φ_μ と Scaled Corrector Φ^{sc} の精度の比較を, 最小固有値に対応する固有ベ

クトルとの内積が 1 となるかどうか確認することで行った.

単純分岐点 A の分岐モードについて, 本手法による Φ_{D_3} と, Φ^{sc} の精度を比較した結果を図 5-(a) に内積 0.9999 から 1 の範囲で示す. 点線で示す Φ^{sc} を見ると, 分岐点のごく近傍でしか内積 1 に近づいていない. 一方, 破線で示す Φ_{D_3} は, はるかに広い範囲で高い精度を保持できている. このように, 分岐モード抽出において, 本手法による Φ_{D_3} の方が信頼性が高いことが確認できる.

2 重分岐点 B においても, 本手法により求めた Φ_{D_2} , Φ_{C_2} の精度は非常に高いものであった (図 5-(b)).



(a) 単純分岐点A周辺

(b) 2重分岐点B周辺

図-5 分岐点周辺での精度比較

(3) 自由度の増大に対する検討

図 6 の 885 自由度のトラスドームについて, 本手法により分岐解析を行った結果, 図 7 のような分岐経路をもつ荷重変位曲線を固有値解析を用いることなく容易に求めることができた.

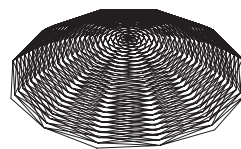


図-6 正六角形状節点を持つトラスドーム

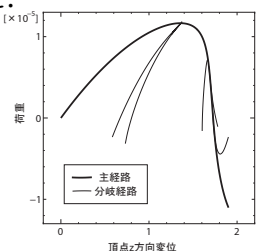


図-7 荷重変位曲線

6. 結論

Scaled Corrector 法を改良した本手法により, 対称性を持つ構造系において, 固有値解析を用いずに高精度な分岐モードの抽出と, 精度の高い分岐点の探索が可能となった. 加えて本手法は, 2 重分岐点にも適用でき, 分岐点から多少離れても分岐モードが抽出できる, 非常に有効な方法であることを数値解析により確認できた.

参考文献

- 1) 野口裕久, 久田俊明: Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発. 日本機械学論文集 (A 編), pp. 2191-2198, 58 巻 555 号, 1992.
- 2) 池田清宏, 室田一雄: 構造系の弾性座屈と分岐, コロナ社, 2001.
- 3) K. Murota and K. Ikeda: Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 12, No.2, pp. 273-297, 1991.