

曲げねじりを受ける曲線橋の剛性マトリックスの定式化

大同工業大学 正会員 事口壽男
大同工業大学 正会員 酒造敏廣

1. まえがき 変形法による曲線桁橋の解析は極めて少ない。曲げねじりを受ける曲線桁橋に関する剛性マトリックスを閉じた解で定式化した研究は皆無である。文献1)において、微分方程式の解から剛性マトリックスを数学的に誘導する方法を示した。これを利用して、本文では荷重項をも含んだ剛性マトリックスの各要素を閉じた代数解で表示することを試みる。数値計算例として、等分布荷重が載荷された3径間連続曲線桁橋を解析し、定式化した剛性マトリックス要素の妥当性を示す。

2. 微分方程式 等分布鉛直荷重と分布ねじり荷重が作用したときの、曲線部材の微小要素に関するつりあい式、および断面力と変位との関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dl} &= -q_y, \quad \frac{dM}{dl} + \frac{T}{R} = Y, \quad \frac{dT}{dl} - \frac{M}{R} = -m_x \\ M &= -EI \left(\frac{d^2 \beta}{dl^2} + \frac{\beta}{R} \right), \quad M_\omega = EI_\omega \left(\frac{d^2 \beta}{dl^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2 v}{dl^2} \right) \\ T &= GJ \left(\frac{d\beta}{dl} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dl} \right) - EI_\omega \left(\frac{d^3 \beta}{dl^3} + \frac{1}{R} \frac{d^3 v}{dl^3} \right) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

たわみ角、ねじれ率は、次式で定義する。

$$\varphi = \frac{dv}{dl}, \quad \gamma = \frac{d\beta}{dl} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dl} \quad \dots (2)$$

3. 剛性マトリックスの定式化 そりねじりを受ける曲線桁の剛性マトリックスは、微分方程式の閉じた解を利用して数学的に誘導できることを示した^{1,2)}。その結果、代数式で求める要素は次式のゴシック体のみを求めればよいがわかっている。

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & -k_{11} & k_{12} & -k_{13} & k_{14} & k_{19} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & -k_{12} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\ & & k_{33} & k_{34} & -k_{13} & -k_{27} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\ & & & k_{44} & -k_{14} & k_{28} & -k_{38} & k_{48} & k_{49} \\ & & & & k_{11} & -k_{12} & k_{13} & -k_{14} & k_{19} \\ & & & & & k_{22} & -k_{23} & k_{24} & -k_{29} \\ & & & & & & k_{33} & -k_{34} & k_{39} \\ & & & & & & & k_{44} & -k_{49} \\ \text{対称} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

4. 剛性マトリックス要素の定式化

式(3)において、荷重項を除いた部分是对角要素に対称である。ゴシック体の要素(20要素)を、次式のパラメータを用いて表記する。

$$\begin{aligned} S &= \sin \Phi, C = \cos \Phi, S_H = \sinh \alpha \Phi, C_H = \cosh \alpha \Phi \\ \alpha &= R \sqrt{GJ/(EI_\omega)}, \quad \lambda = l_\omega / (R^2 l), \quad \chi = 1 + \alpha^2 \\ \mu &= (1 + 1/(\lambda \chi))/2, \quad \rho = \lambda \mu \chi^2 \end{aligned} \quad \dots (4)$$

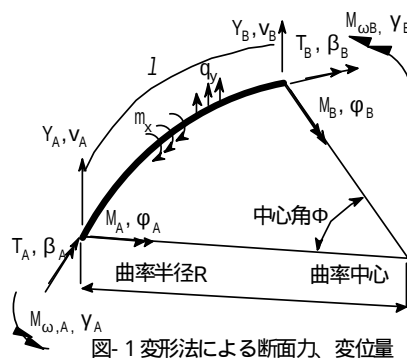


図-1 変形法による断面力、変位

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\alpha GJ}{R^3 \zeta_1} (S_H \Phi^2 \rho^2 + 2\Phi(C - C_H)\alpha\rho + 2S(C C_H - 1)\alpha(\alpha^2 - \rho)) \\ &\quad - S^2 S_H (\alpha^2(\alpha - 1)(\alpha + 1) - \rho(2\alpha^2 - \rho)) \\ k_{12} &= \frac{-\chi GJ}{R^2 \zeta_1} (\Phi\rho(S_H\alpha(C - 1) + S(C_H - 1)) + \alpha(C - 1)(2\alpha \\ &\quad \cdot (C C_H - 1) - S S_H(\alpha^2 - \rho - 1)) + S^2 \rho(C_H - 1)) \\ k_{13} &= \frac{GJ}{R^2 \zeta_1} (-\Phi^2 S_H \alpha \rho^2 - \Phi\rho(\chi((C - 1)(C_H + 1) - S S_H \alpha) \\ &\quad - 2(C - C_H)) + S(C C_H - 1)(2\alpha^2 + \rho\chi - 2\rho) + S\rho\chi(C - C_H) \\ &\quad + S^2 S_H(\rho^2 - \rho\chi + 2\rho - \chi + 2)) \\ k_{14} &= \frac{-GJ}{R \zeta_1} (\Phi^2 \rho^2(C_H - 1) + \Phi\rho(2S_H\alpha(C - 1) - S(\alpha + 1) \\ &\quad \cdot (C_H - 1)(\alpha - 1)) + 2\alpha^2(C - 1)(C C_H - 1) \\ &\quad - S S_H \alpha(\alpha + 1)(C - 1)(\alpha - 1) + S^2 \rho(C_H - 1)(\alpha^2 - \rho + 1)) \\ k_{22} &= \frac{GJ \chi^2}{R \alpha^2 \zeta_1} (\Phi^2 S_H \alpha \rho - \Phi(\alpha^2(C_H(C^2 + 1) - 2C - C S S_H \alpha \\ &\quad \cdot (\alpha^2 - \rho) + 2\rho(C_H - 1) + S_H \alpha(C^2 + 1) + 2S(C_H - 1)(C\rho + \alpha^2) \\ &\quad - S_H \alpha(2C + S^2 \alpha^2)) \\ k_{23} &= \frac{-GJ \chi}{R \alpha^2 \zeta_1} (\Phi C S_H \alpha^3 \rho(C - 1) - \Phi C C_H S \alpha^2 \chi - \Phi S \alpha \rho \\ &\quad \cdot (\alpha(C_H - 1) + S S_H) + \Phi S \alpha^2(S S_H \alpha + 1)\chi - 2\alpha^4(C - 1) \\ &\quad \cdot (C C_H - 1) + (C S S_H - S S_H)\alpha(2\alpha^4 + \alpha^2 + 1) - S S_H \alpha^3 \rho(C - 1) \\ &\quad + S^2 \rho(C_H - 1)(\chi + 1)) \\ k_{24} &= \frac{-GJ \chi}{\alpha^2 \zeta_1} (\Phi^2 \alpha \rho(S \alpha - S_H) + \Phi \alpha \rho(C - 1)(\alpha(C C_H + 1) \\ &\quad + S S_H) - \Phi \alpha^2(2C(S S_H \alpha + 1) - C_H S^2(\alpha - 1)(\alpha + 1) - 2C_H) \\ &\quad + 2\Phi\rho(C_H - 1) + 2\alpha(C - 1)(C_H S \alpha^3 + S_H(\alpha^2 + 1)) - S(C_H - 1) \\ &\quad \cdot (\alpha^2(C\rho + 2) + 2C\rho) + S \alpha \rho(\alpha(C_H - 1) + S S_H) + S^2 S_H \alpha \\ &\quad \cdot (3\alpha^2 + 1)) \\ k_{33} &= \frac{GJ}{R \alpha^2 \zeta_1} (\Phi^2 S_H \alpha \rho(\chi^2 + \alpha^2 \rho) + \Phi(2\alpha^2 \rho \chi(C C_H \\ &\quad - S S_H \alpha) - \chi^2(S \alpha^2(C S_H \alpha + C_H S) - \rho(C S S_H \alpha - 2C_H)) \\ &\quad - 2\alpha^2 \rho(C - C_H) + 2\rho\chi) + 2C S \rho \chi - 2C C_H S(\alpha^4(\chi + 1) \\ &\quad + \rho(\chi + \alpha)(\chi - \alpha)) + 2S_H \alpha^3 \chi^2(C - 1) + 2C_H S \alpha^2 \chi \\ &\quad \cdot (\chi + \rho) + S^2 S_H \alpha(\alpha^2(2\alpha^4 + 4\alpha^2 + 1) - \alpha^2 \rho(\rho + 2) + 1) \\ &\quad - 2S \alpha^2(\rho + 1)) \end{aligned}$$

キーワード 曲線桁橋、そりねじり、剛性マトリックス、変形法

連絡先 〒457-0818 名古屋市南区白水町40 大同工業大学 TEL 052-612-5571

$$k_{34} = \frac{GJ}{\alpha^2 \zeta_1} (-\Phi^2 \alpha^2 \rho (\chi (C-C_H) - \rho (C_H-1)) - \Phi C C_H S \alpha^2 \chi$$

$$\cdot (\alpha^2 - \rho - 1) + \Phi S_H \alpha \rho (C-1) (3\alpha^2 + 1) - 2\Phi C_H S \alpha^4 \rho$$

$$- \Phi S^2 S_H \alpha \chi (2\alpha^2 - \rho) + \Phi S \alpha^2 (\alpha-1)(\alpha+1)(\rho + \chi)$$

$$- S S_H \alpha (C-1) (4\alpha^4 + 3\alpha^2 + \rho \chi + 1) + C_H S^2 (2\alpha^2 (\alpha^4 - \rho)$$

$$- \rho (\alpha^2 \rho + 2)) + 2\alpha^6 (C-1) (C_H + 1) + S^2 \rho (\alpha^2 \rho + 2 \chi))$$

$$k_{44} = \frac{GJR}{\alpha^2 \zeta_1} (\Phi^3 C_H \alpha^2 \rho^2 - \Phi^2 \alpha \rho (2S\alpha + S_H (\alpha^2 + \rho - 1)$$

$$+ 2\Phi \rho \chi (C C_H \alpha^2 + S S_H \alpha + 1) + \Phi C S S_H \alpha (\alpha^2 (\chi + 2)$$

$$- \rho \chi) - 2\alpha^2 (\rho - 1) (\Phi C - S) - \Phi C_H S^2 \alpha^2 ((\rho - \chi)^2 - 2)$$

$$- 2\Phi C_H (\alpha^2 (\rho \chi + 1) + \rho) - 2C C_H S (\alpha^4 (\chi + 1) - \rho (\chi + \alpha)$$

$$\cdot (\chi - \alpha)) - 2C \chi (S \rho + S_H \alpha \chi) - 2\alpha \chi (C_H S \alpha (\rho - \chi)$$

$$- S_H \chi) - S^2 S_H \alpha (\alpha^2 + 2\chi^2 - (\rho - 1)^2)) \quad \cdots (5)_{1-10}$$

ここに、式(5)の分母中の ζ_1 は、次式で与えられる。

$$\zeta_1 = \Phi^3 S_H \alpha \rho^2 + 2\Phi^2 \rho (\alpha^2 (C-C_H) - (C_H-1) \rho) + 2\Phi C C_H S$$

$$\cdot \alpha^2 (\alpha^2 - \rho) + 2\Phi S_H \alpha \rho (\alpha+1) (C-1) (\alpha-1)$$

$$+ 2\Phi S \alpha^2 (\rho (2C_H-1) - \alpha^2) - \Phi S^2 S_H \alpha (\alpha^2 - \alpha - \rho)$$

$$\cdot (\alpha^2 + \alpha - \rho) - 4\alpha^4 (C-1) (C_H+1) - 2S S_H \alpha (C-1) (\alpha^2 (\alpha$$

$$- 1) (\alpha+1) - \rho (\alpha^2 + 1)) - 2S^2 (2C_H \alpha^4 - \rho^2 (C_H-1)) \quad \cdots (6)$$

$$k_{26} = \frac{GJ \chi^2}{R \alpha^2 \zeta_2} (-\Phi^2 C S_H \alpha \rho + 2\Phi C C_H (\alpha^2 + \rho) - 2\Phi C \rho$$

$$+ \Phi (S^2 - 2) \alpha^2 - \Phi S S_H \alpha (\alpha^2 - \rho) - 2S (C_H-1) (C \alpha^2 + \rho)$$

$$- 2S_H (C-1) \alpha + S^2 S_H \alpha (\alpha-1) (\alpha+1))$$

$$k_{27} = \frac{GJ \chi}{R \alpha^2 \zeta_2} (-\Phi^2 S S_H \alpha \rho \chi - \Phi (S (C-C_H) \alpha^2 \chi + S_H (C-1)$$

$$\cdot \alpha^3 \rho - S (C_H-1) \rho (\chi + 1)) - 2(C-1) (C-C_H) \alpha^4 - S S_H \alpha$$

$$\cdot (C-1) (\alpha^2 \rho + \alpha^2 - 1) - S^2 (C_H-1) \alpha^2 (\rho + 2))$$

$$k_{28} = \frac{GJ \chi}{\alpha^2 \zeta_2} (-\Phi^2 (C S_H - C_H S \alpha) \alpha \rho + \Phi (C^2 \alpha^2 (\rho - 1)$$

$$+ C C_H (\alpha^2 (\rho + 2) + 2\rho) - \alpha^2 (C_H \rho + 1 - S \alpha (S \alpha - 2S_H))$$

$$- C \rho (\chi + 1)) + C_H S (C \alpha^2 (\rho - 2) - \rho (\chi + 1))$$

$$+ C S \alpha^2 (2\chi - \rho) + S_H \alpha \chi (C-1)^2 + S^2 S_H \alpha (2\alpha^2 + \rho)$$

$$- S (2\alpha^4 - \rho (\chi + 1)))$$

$$k_{37} = \frac{-GJ}{R \alpha^2 \zeta_2} (\Phi^2 S_H \alpha \rho (C \chi^2 + \alpha^2 \rho) - \Phi \rho \chi (2C C_H + S S_H \alpha$$

$$\cdot (\alpha-1) (\alpha+1) + 2\alpha^2) - 2\Phi (C-C_H) \alpha^2 \rho + \Phi (2C \rho - S \alpha^2$$

$$\cdot (S + S_H \alpha)) \chi^2 + 2C C_H S \alpha^2 (\rho + 1) - 2(C S + S_H \alpha (C-1)) \alpha^2 \chi^2$$

$$- 2S (C \alpha^2 + C_H \rho \chi - S^2 S_H \alpha (\alpha \rho + \alpha + 1) (\alpha \rho + \alpha - 1)$$

$$+ S \alpha^2 (\alpha^4 + 2\alpha^2 - 1) + S (\rho (\alpha^4 + 1) + \chi^2 (\alpha^2 + \rho)))$$

$$k_{38} = \frac{GJ}{\alpha^2 \zeta_2} (\Phi^2 (C C_H \alpha + S S_H - \alpha) \alpha \rho \chi + \Phi (C_H-1) (\Phi \alpha^2 \rho$$

$$- 2S) \rho - \Phi C S \alpha^2 \chi (\rho - \chi) + \Phi S_H (C-1) \alpha \rho (\alpha+1)$$

$$\cdot (\alpha-1) - \Phi S (C_H \rho + C_H \chi - 2\rho) \alpha^2 \chi - 2C C_H \alpha^4 (\alpha^2 + 2)$$

$$+ S S_H (C-1) \alpha (\alpha^2 + \rho \chi - 1) - 2(C-C_H-1) \alpha^4 (\alpha^2 + 2)$$

$$- C_H S^2 \alpha^2 (\rho^2 - 2) + S^2 \alpha^2 (\rho^2 - 2 \chi^2)) \quad \cdots (7)_{1-15}$$

上式(7)の分母中の ζ_2 は

$$\zeta_2 = \Phi^3 S_H \alpha \rho^2 + 2\Phi^2 \rho ((C-C_H) \alpha^2 - (C_H-1) \rho)$$

$$- \Phi \alpha (2S_H \rho (C-1) (C \alpha^2 + 1) - 2S \alpha (\alpha^2 (C C_H-1)$$

$$- \rho (C C_H - 2C_H + 1)) + S^2 S_H (\alpha^2 (\alpha-1) (\alpha+1) + \rho^2))$$

$$+ 4(C-1) (C C_H-1) \alpha^4 - 2S S_H (C-1) \alpha (\alpha^2 (\alpha-1) (\alpha+1)$$

$$- \rho \chi) + 2S^2 (C_H-1) \rho^2 \quad \cdots (8)$$

k_{48} と荷重項 k_{i9} ($i=1 \sim 4$)は省略している。

5. 数値計算例 図-2に、そりねじりを考慮した3径間連続S字橋の平面図と正面図を示す。解析は7節点とした。図中に自由量（未知変位）と未知支点反力を示す。

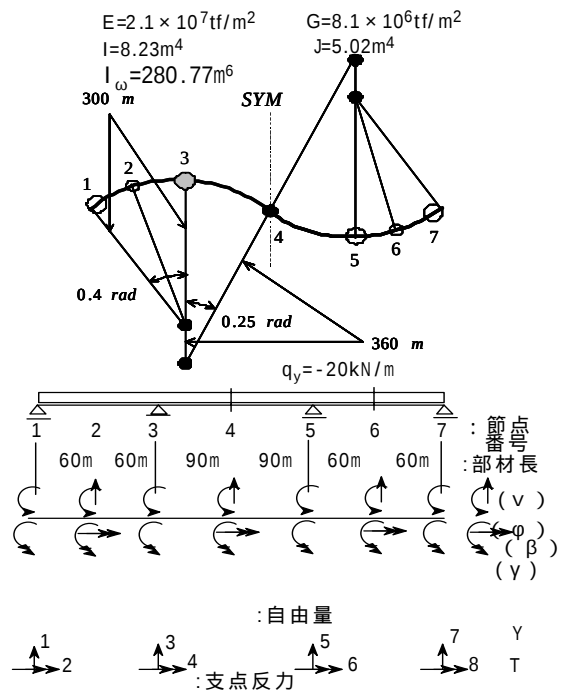


図-2 3径間連続S字曲線橋

図-2のそりねじりを考慮した3径間連続S字曲線橋の解析結果を以下に示す。Dは未知変位で、Xは未知反力である。解は対象性を満足し、精度がよいことが判る。

未知変位Dは

$$D = K_{rr}^{-1} Q = \begin{pmatrix} -3.011009 \times 10^{-4} \\ -3.500843 \times 10^{-6} \\ -6.74992 \times 10^{-3} \\ 1.513651 \times 10^{-4} \\ -1.082359 \times 10^{-4} \\ 1.500545 \times 10^{-6} \\ -2.982348 \times 10^{-4} \\ 2.732133 \times 10^{-7} \\ -4.671094 \times 10^{-2} \\ -4.515744 \times 10^{-20} \\ 3.006967 \times 10^{-20} \\ 5.144839 \times 10^{-6} \\ 2.982348 \times 10^{-4} \\ 2.732133 \times 10^{-7} \\ -6.74992 \times 10^{-3} \\ -1.513651 \times 10^{-4} \\ 1.082359 \times 10^{-4} \\ 1.500545 \times 10^{-6} \\ 3.011009 \times 10^{-4} \\ -3.500843 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

未知反力Xは

$$X = K_{or} D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 793.7275483 \\ 1623.276605 \\ 3406.272279 \\ -3408.666232 \\ 3406.272279 \\ 3408.666232 \\ 793.7275483 \\ -1623.276605 \end{pmatrix}$$

Unit
v: m, β and ϕ : rad, y: 1/m
T: kN·m, Y: kN

6. あとがき そりねじりを考慮した曲線桁の剛性マトリックスの要素を閉じた代数解で定式化できた。数値計算により、その妥当性を検証した。文献3)による解と一致していることを確かめている。要素に双曲線関数項が多く含むが、変位法によると高精度の解が得られる。謝辞 福井工業大学の中井博先生には多大のご指摘をいただいた。ここに、感謝します。

参考文献 1)事口：曲げねじりを受ける曲線桁のそり剛性マトリックスの誘導 59回年次学術講演会 2)事口、酒造：剛性マトリックスの誘導法の開発と、直および曲線桁解析への適用 鋼構造年次論文報告集12巻、3)中井、事口 伝達マトリックス法により鋼橋の解析、森北出版、1992