一般化高次はり理論に基づく有限要素法の解析精度と要素特性

福島工業高等専門学校　正会員　根岸 嘉和

１．緒　言

本報告は、著者らが先に提案したはりの解析に関する一般化高次理論[1]の考え方（２次元はりの変位成分を高さ方向座標のべき級数で仮定する手法）を用いた有限要素法の構築によって、はり曲げの有限要素解析の精密化と一般化高次はり理論の有用性の拡大を目指すものである。ここでは、厳密解がある曲げ問題の解析を通じて本有限要素法の精度を検証し、要素特性について検討する。

２．一般化高次理論

図-1 に示す座標系で、はり(均質等方性)の境界面に分布荷重を載荷した問題の一般化高次理論の概要を示す。

はりの変位成分 $u_i : i = x, z$ を次式のように高さ方向座標 z のベキ級数(N:理論の次数)で展開する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x) \tag{1}$$

変分原理により、変位係数 $u_{j(n)}(x)$ の支配方程式が境界条件式とともに、次式のように導かれる。

$$\sigma_{ix,x}^{(n)} - n\sigma_{iz}^{(n-1)} + F_i^{(n)} = 0 \tag{2}$$

上式の各項は次式の高次断面力と荷重項である。

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z^n dz, \quad F_i^{(n)} = \left[\bar{\sigma}_{zi} z^n\right]_{z=-h/2}^{z=h/2} \tag{3}$$

３．精密化有限要素法の構築

はり要素内の変位成分 $u_i : i = x, z$ を高さ方向に**図-2** のように z のベキ級数 z^n で展開仮定する。また、長さ方向には前報[3]の結果を踏まえ、３節点を設け**図-3** の変位関数 $N^{[m]}(\xi);\xi = x/(l/2)$;m=1〜3 を採用し、これらと係数 $u_{i(n)}^{[m]}$ との積の重ね合わせとして任意の２次関数で表す。

これらより変位成分は次式で表される。

$$u_i = \sum_n z^n u_{i(n)}(x) = \sum_n z^n \sum_{m=1}^{3} u_{i(n)}^{[m]} N^{[m]}(\xi) \tag{4}$$

これをﾏﾄﾘｯｸｽ表示すると次式のようになる。

$$\{\boldsymbol{u}\}=[\boldsymbol{N}]\ \{\boldsymbol{\delta}\} \tag{5}$$

$\{\delta\}$ ははり要素の３節点での節点変位 $u_{i(n)}^{[m]}$ を成分とする変位ベクトルであり、曲げ挙動では次式となる。

$$\{\delta\} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{3}\{u_{z(2n-2)}^{[p]}; u_{x(2n-1)}^{[p]}\} \tag{6}$$

幾何学的関係式より、ひずみﾍﾞｸﾄﾙ $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ は、

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{N'}]\ \{\boldsymbol{\delta}\} \tag{7}$$

構成関係式より、剛性係数ﾏﾄﾘｯｸｽ $[D]$ を用いて、応力ﾍﾞｸﾄﾙ $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ は、

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[D]\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[D]\ [\boldsymbol{N'}]\ \{\boldsymbol{\delta}\} \tag{8}$$

と求まり，仮想仕事の原理より次の剛性方程式を得る。

$$\{\boldsymbol{f}\}=[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{\delta}\} \tag{9}$$

なお要素剛性ﾏﾄﾘｯｸｽ $[\boldsymbol{k}]$ は次式で計算される。

$$[\boldsymbol{k}] = \int [\boldsymbol{N'}]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{D}]\ [\boldsymbol{N'}]\ dV \tag{10}$$

また、変位ﾍﾞｸﾄﾙの成分 $u_{i(n)}^{[m]}$ に対応した節点力ﾍﾞｸﾄﾙ $\{\boldsymbol{f}\}$ の成分 $f_{i(n)}^{[m]}$ は次式で求められる。

$$f_{i(n)}^{[m]} = \int_{-l/2}^{+l/2} [p(x) u_{z(n)}^{[m]}(x)]_{z=-h/2}^{z=+h/2} dx \tag{11}$$

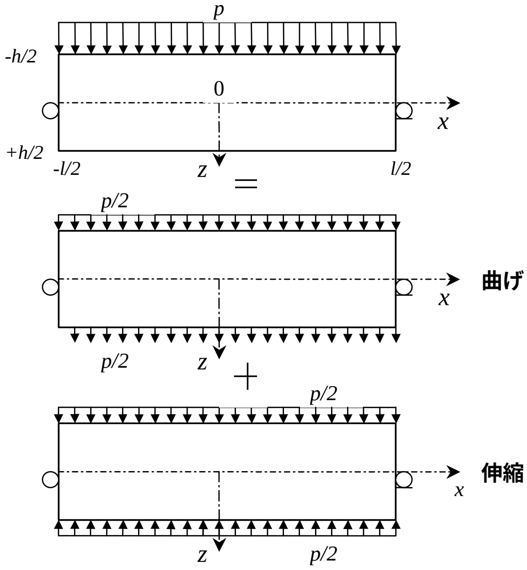
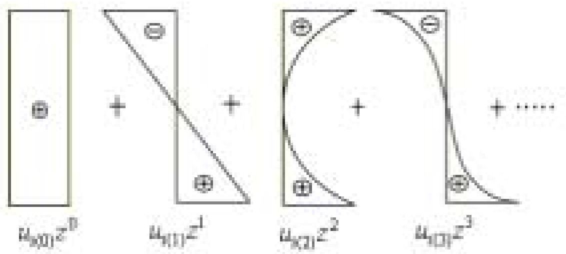


図-1　座標系と梁の曲げ挙動･伸縮挙



曲げ　uz : n=0,2,4,~　　ux,: n=1,3,5,~

伸縮　uz : n,: n=1,3,5,~　　ux, : : n=0,2,4,~

図-2 変位係数 ui(n) の高さ方向分布

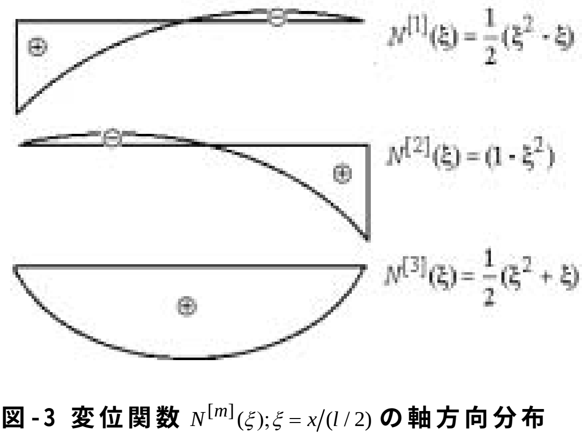


図-3 変位関数 $N^{[m]}(\xi);\xi = x/(l/2)$ の軸方向分布

キーワード：有限要素法　一般化高次理論　はり曲げ

〒970-8034 福島県いわき市平上荒川字長尾 30　福島工業高等専門学校 建設環境工学科　Tel 0246-46-0831

４．解析例と精度特性

厳密解のある境界条件のはり（端面がその面内に変形しない：軸直角方向変位＝０の単純支持）の問題を解析する。本問題は前報 [3] (端面がその面内に変形する：中立軸位置の鉛直変位＝０の単純ばりの問題に関して、２次元弾性論の限定的な応力関数による弾性解と比較した) の系に比して、はりの曲げに伴う伸縮挙動の解析結果が全体挙動の解析精度に大きく影響する問題である。

図-1 の単純ばり (h/l=0.75, ν=0.3)に等分布荷重 pが満載された場合を,本手法のｎ次理論要素(n=1～3)に基づく各有限要素法で解く。

同時に Bernoulli-Euler 古典理論に基づく有限要素法(Classical)による解析を行い、厳密解(Exact)[2]との比較を通じて精度の検証を行う。

図-4 にはり中央位置の上縁における曲げ応力 $[\sigma_{xx}]_{z=-h/2}$ の各解の要素等分割数 ne の増大に伴う収束状況を示す。1 次理論要素(1st),2 次理論要素(2nd),3 次理論要素(3rd)の各解とも要素数の増大に伴って比較的少ない要素分割で各理論次数の収束解に収束している。なお 1st は古典解に収束し、3rd は厳密解に収束しており、理論次数の増大に伴う精度向上性と、高次理論要素の精度の良好さが示されている。

図-5 と図-6 にはり中央位置での鉛直変位 u_z およびはり端面の軸方向変位 u_x の高さ方向分布の収束解(16 要素)を示す。古典解(Classical)のたわみに当たる一定値および伸縮挙動無視の直線変化から、両変位とも 1st はせん断変形と伸縮挙動を含む直線分布で精度が向上し、2nd は 3rd に近似した曲線分布を与え、3rd は厳密解に一致しており、精度の向上性と良好さが示された。

５．要素特性

一般化高次理論に基づく本要素は、高さ方向に高次の分布が得られる点では、高次の平面要素（平板では立体要素）と同じであるが、各次数の成分の寄与が個別に把握でき、はりの形状比や荷重の変動幅等によって変わる高次成分の影響を細分化して解析できる点で優れている。また、古典理論の単純な系から厳密解の複雑な挙動に至るまでの各段階のはりの力学挙動を、適切な理論次数の要素を用いて効率よく精密に解析できる利点を有している。

６．結　言

一般化高次理論に基づく本有限要素法は、理論次数の高次化に伴い高精度な解を与えており、厳密解を目標値とする精密化有限要素法の構築と一般化高次理論の有用化が図られた。

なお、平板曲げ要素 [4]に用いた手法：せん断変形の変化率が０となるように u_z と u_x の軸方向分布関数の間に従属関係を持たせ、自由度の削減を図ると共に、スレンダーなはりにおける精度低下を回避する手法を用いたはり要素も開発したが、この要素の結果については当日発表する。

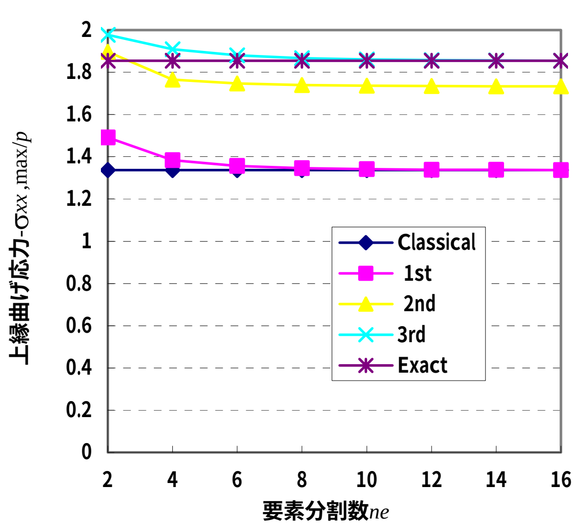


図-4 要素分割による曲げ応力-σxx,max の収束性

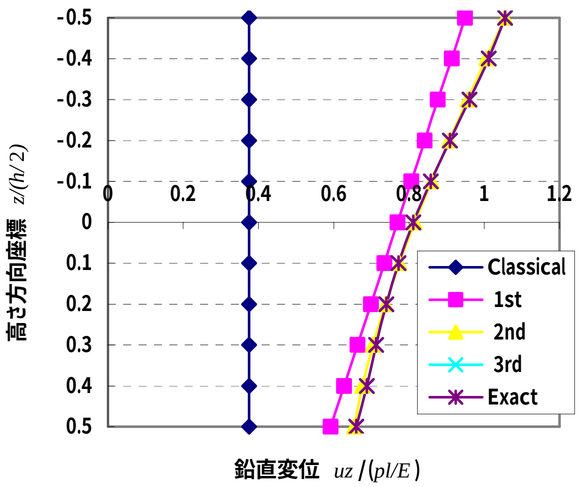


図-5 最大鉛直変位 uz の高さ方向分布

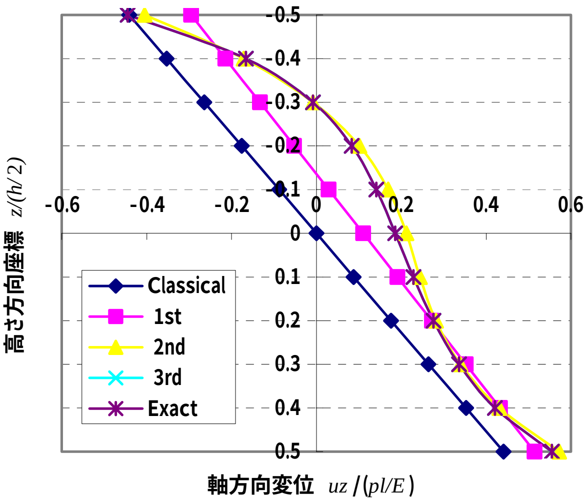


図-6 最大軸方向変位 ux の高さ方向分布

参考文献 1) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文集, 350 号/Ⅰ-2, pp.351-354, 1984.
2) Pagano,N.J.：Journal of Composite Materials, Vol.4, pp.20-34, 1974.
3) 根岸嘉和：平成 16 年度 東北支部技術研究発表会講演概要, pp.88-89, 2005.
4) 根岸嘉和：第 54 回 理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2005, pp.565-567, 2005.