Mindlin 板の高次振動解析への Spline-Ritz 法の適用

大同工業大学大学院 学生員 渡辺晶子 大同工業大学 正員 水澤富作

1. はじめに 超高速運動する構造要素や物体の衝突を受ける構造物には、非常に高次の振動モードや衝 撃音が誘発されるので、高次振動や衝撃音による疲労問題が設計上重要な課題になっている¹⁾。数百Hzから数 千Hzの高次振動は、高速運動するスペースシャトル、高速回転するハードディスクや超音波加振を受ける物体 からも発生するが、比較的低周波域(数十次以内の振動数)での動的応答と比較して、平板の高次振動問題に ついては、理論的にさほど解明されていない。汎用性の高い有限要素法を適用しても、構造物に対して非常に 小さな波長を伴う高次振動の解明は、計算機の計算時間と容量の制限や数値誤差などの問題により、精度の高 い解析結果を得ることが困難な問題とされている²⁾。Zhaoら³⁾は、薄板理論に基づくDSC法を用いて、薄板の高 次振動解析を行っているが、横せん断変形や回転慣性の影響が無視されている。渡辺ら⁴⁾は、spline-Ritz法 を適用した薄板の高次振動解析を行い、DSC法より精度の高い解析結果を報告している。

本研究では、平板の数百次から数千次の振動数や振動モードを精度よく求めるために、高次振動で重要に なる横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した1次せん断変形理論に基づく spline-Ritz 法⁴⁾を定式化し、 Mindlin 板の高次振動解析を行い、本手法の収束性や精度比較などについて検討を行っている。

図-1に示すように、×軸方向に固有関数を Fouier 級数展開し、y 軸方向に spline 関数を 2.解析手法 仮定した半解析的な spline-Ritz 法 4)を用いて定式化する。横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、次式に示すような独立したたわみWと2つの回転角 θ_{x}, θ_{y} が未知変位になる。したがっ て、無次元座標($\xi = x/a, \eta = y/b, W' = W/h$)を用いて表した変位関数は、一方向に固有関数を Fourier 展開し、 $y, \eta = y/b$ 他の方向に B-spline 関数を仮定すれば、それぞれ次式で表される。

$$\theta_{x}(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{i_{y}} A_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot \overline{Y_{m}}(\xi) = \sum_{m=1}^{r} [N] \overline{Y_{m}}(\xi) \{\delta_{A}\}_{m}$$

$$\theta_{y}(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{i_{y}} B_{mn} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_{m}(\xi) = \sum_{m=1}^{r} [N] Y_{m}(\xi) \{\delta_{B}\}_{m}$$

$$W'(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{i_{y}} C_{nm} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_{m}(\xi) = \sum_{m=1}^{r} [N] Y_{m}(\xi) \{\delta_{c}\}_{m}$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{i_{y}} C_{nm} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_{m}(\xi) = \sum_{m=1}^{r} [N] Y_{m}(\xi) \{\delta_{c}\}_{m}$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{i_{y}} C_{nm} N_{n,k}(\eta) \{\delta_{A}\}_{m} = \{A_{1m}, A_{2m}, \cdots, A_{i_{y}m}\}^{t_{y}},$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} C_{nm} N_{n,k}(\eta) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} C_{nm} N_{n,k}(\eta) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} C_{nm} N_{n,k}(\eta) + \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} C_{nm} N_{n,k}(\eta) + \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} C_{nm} N_{n,k}(\eta) + \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \sum_{n=1}^{r$$

 $\{\delta_B\}_m = \{B_{1m}, B_{2m}, \cdots, B_{i,m}\}^T, \{\delta_C\}_m = \{C_{1m}, C_{2m}, \cdots, C_{i,m}\}^T$ (2)

I

 $x, \xi = x/a$ a

図-1 Mindlin 板と座標系 である。 ただし、 $i_n = k - 1 + M_1, Y_n(\xi) \ge \overline{Y_n}(\xi)$ は与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $N_{n,k}(\eta)$ は正規化さ B-spline 関数であり、k-1は Spline 次数、 M_{v} は y 軸方向の離散点の数である。また、r は級数の項数を示す。

長方形 Mindlin 板のひずみエネルギーUと運動エネルギーTは、それぞれ次式で与えられる。

$$U = (D/2)(a/b) \int_{0}^{1} \left\{ (b/a)^{2} (\partial \theta_{x}/\partial \xi)^{2} + (\partial \theta_{y}/\partial \eta)^{2} + 2\upsilon (b/a)(\partial \theta_{x}/\partial \xi)(\partial \theta_{y}/\partial \eta) + 0.5(1-\upsilon) \left\{ (\partial \theta_{x}/\partial \eta) + (b/a)(\partial \theta_{y}/\partial \xi) \right\}^{2} + 6(1-\upsilon)\kappa (b/h)^{2} \left[\left\{ (b/a)(\partial W'/\partial \xi) + \theta_{x} \right\}^{2} + \left\{ (\partial W'/\partial \eta) + \theta_{y} \right\}^{2} \right\} d\xi d\eta$$
(3)

$$T = (\rho h/2)\omega^2 a b^3 \int_0^1 \int_0^1 \langle W'^2 + (1/12)(h/b)^2 (\theta_x^2 + \theta_y^2) \rangle d\xi d\eta$$

(4)

ここで、D は板の曲げ剛性、、、、 ρ は、それぞれポアソン比、せん断修正係数と密度である。また、 ω は円振動数 (rad/sec)である。 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー Пは、次式で与えられる。 $\Pi = U - T$ (5) したがって、式(1)を式(5)に代入して、極値化すれば、次式の代数方程式が求められる。

 $\partial \Pi = \delta(U - T) = [K] \{\Delta\} - n_*^2 [M] \{\Delta\} = 0, \{\Delta\}^T = \{\{\delta_A\}_m, \{\delta_B\}_m, \{\delta_C\}_m\}$ (6)

ここで、[K]と[M]の行列の大きさは 3 × (My+k-2)であり、 $n^* = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ は振動数パラメータである。 キーワード・snline、Pitz 注 Mindlin 板 喜次振動 長方形板 喜次振動モード

<u>3.数値計算例および考察</u>

ここでは、平板の高次振動解析の収束性や解析精度に ついて示す。ただし、 $\kappa = \pi^2/12$, =0.3 に仮定している。

表-1には、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 つの辺 が固定された正方形板 (SS-CC)の振動数パラメータ $n^* = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$ の収束性に与える離散点の数 My が示 してある。ここで、b/h=1000, My は 51 から 201 まで変化

リ、離散点の数を増大すると、高次 の振動数パラメータが一定値への安 定した収束状態を示している。**表-2** には、5千次モードまでの振動数パ ラメータの精度比較が示してある。 Levy 法を適用した薄板の高次振動 の厳密解を基準にして、本手法(SRM) と Zhao らの DSC 法³⁾を用いて得られ た値の相対誤差も示してある。ただ し、本手法では、k-1=5, My=201 を 採用し、また b/h を 1000 と 10000

に仮定している。これより、本手法を用いれば、5 千次までの振動数パラメータの精度は、b/h=10000 にすれば、誤差 0.1%以内の精度が得られている。 また、本手法の結果は、DSC 法と比較して、より高 い精度を示している。 表 - 3 には、正方形 Mindlin 板の高次振動数パラメータに与える幅厚比 b/h とモ ード形状 (m,n)の影響が示してある。また、図 - 2 には、高次振動数パラメータ n*に与える b/h の影響

が示してある。これより、b/h を変化させると、与えられた振動次数に対応するモード形状が変化し、また、b/h が小さくなると、高次振動に与える横せん断変形の影響が顕著に現れてくる。

4. まとめ 本研究で得られた結果をまとめと、以下のとおりで ある。 1)本手法を用いれば、高次の振動モード次数に対しても、 安定した収束性と精度の高い解析結果が得られる。2)Mindlin板 の高次振動に与える横せん断変形の影響は、b/hが小さいほど顕著 に現れる。3)DSC法の欠点である自由の境界条件は、本手法を用 いれば容易に取り扱える。今後は、斜板や扇形板の高次振動解析を 行い、これらの板の高次振動特性について明らかにしたい。

参考文献 1) Langley, R.S et al: The Aeronautical Journal,

pp. 287-297,1998. 2) Zienkiewicz, O.C.: IJNME, Vol. 47, pp. 9-28, 2000. 3) Zhao, Y.B. et al.: IJSS, Vol. 39, pp.65-88, 2002 . 4) 渡辺・水澤:平成16年度土木学会中部支部研究発表, I-39, pp. 77-78,2005.

表-1 正方形Mindlin板の高次振動数パラメータの収束性に与える離散点の数の影響;SS-CC,b/h=1000,a/b=1.0,k-1=5

My	50th	100th	500th	1000th	1500th	2000th		
	(7,5) (1		(24,10)	(23,28)	(36,26)	(51,6)		
51	76.8668	147.949	679.823	1412.56	2319.57	3426.44		
71	76.8668	147.949 147.949	678.735 678.734	1330.61 1330.61	2006.26 1986.35	2734.22 2634.36		
85	76.8668							
89	76.8668	147.949	678.734	1330.52	1982.71	2629.53		
91	76.8668	147.949	678.734	1330.52 1330.51	1981.12 1978.99	2626.10 2624.95		
101	76.8668	147.949	678.734					
201	201 76.8668		678.734	1330.51	1978.98	2624.84		
(m,n)は、それぞれx方向、y方向の半波長の数である。								

させ、また、k-1=5とする。これよ 表-2 正方形 tindli板の高次振動数パラメタの精度比較 \$S-CC, a/b=1.0, My = 201, k-1=5

-										
	mode			b/h=10000	b/h=1000	Exact values		b/h=10000	b/h=1000	
_	number	m	n	SRM	SRM	Levy	DSCM	SRM(%)	SRM(%)	DSCM(%)
	1	1	1	2.93331	2.93331	2.93330	2.93330	0.00	0.00	0.00
	10	3	3	20.2450	20.2441	20.2450	20.2451	0.00	0.00	0.00
	50	7	5	76.8785	76.8668	76.8786	76.8798	0.00	-0.02	0.00
	100	11	5	147.991	147.949	147.991	147.993	0.00	-0.03	0.00
	300	17	11	415.678	415.354	415.682	415.709	0.00	-0.08	0.01
	500	24	10	679.584	678.734	679.593	679.631	0.00	-0.13	0.01
	700	29	10	944.008	942.377	944.025	944.076	0.00	-0.17	0.01
	1000	23	28	1333.83	1330.51	1333.87	1334.31	0.00	-0.25	0.03
	1500	36	26	1986.23	1978.98	1986.31	1986.91	0.00	-0.37	0.03
	2000	51	6	2637.51	2624.95	2637.64	2637.72	0.00	-0.48	0.00
	2500	29	49	3282.93	3263.10	3283.09	3285.66	0.00	-0.61	0.08
	3000	62	9	3925.89	3898.17	3926.18	3930.66	-0.01	-0.71	0.11
	3500	61	29	4573.10	4533.47	4572.10	4585.86	0.02	-0.84	0.30
	4000	72	6	5219.95	5170.98	5220.45	5245.00	-0.01	-0.95	0.47
	4500	55	53	5868.24	5804.74	5867.87	5925.60	0.01	-1.08	0.98
	5000	31	74	6512.10	6426.89	6504.22	6633.36	0.12	-1.19	1.99
-										

 $SRM = spline - Ritzi_{\Xi}, DSCM = discrete sin gular cobvolution = Levy_{\Xi^3}, Levy = Levy_{\Xi^3}$

表-3 正方形*Mindlin*板の高次振動数パラメータ $n * \mathcal{L}(m,n)$ に与える $h/h \oplus \mathbb{S}$ 響: SS = CC a/h = 1 k = 1 = 5

振動次数	m	nt	o/h=10000	m	n	b/h=100	m	n	b/h=10
1	1	1	2.9333	1	1	2.9306	1	1	2.6997
10	3	3	20.245	3	3	20.153	3	3	14.992
100	11	5	147.99	11	5	144.04	1	12	62.408
500	24	10	679.58	24	10	609.36	13	21	114.44
1000	23	28	1333.8	31	19	1099.2	5	58	155.00
1500	36	26	1986.2	38	23	1530.3	30	12	186.89
2000	51	6	2637.5	29	42	1913.4	25	45	213.91
2500	29	49	3282.9	48	31	2267.1	35	22	237.82
3000	62	9	3925.9	6	62	2587.4	41	17	259.40
3500	61	29	4573.1	44	51	2890.9	41	31	279.16
4000	72	6	5220.0	66	29	3179.2	44	32	297.95
4500	55	53	5868.2	74	19	3446.8	51	17	315.39
5000	31	74	6512.1	68	43	3702.8	38	73	331.88

