B-spline 円筒リング法を用いた厚肉円筒シェルの自由振動解析

北海道大学大学院　工学研究科　北方圏環境政策工学専攻　学生員　○名木野　晴暢
北海道大学大学院　工学研究科　北方圏環境政策工学専攻　　正員　　　三上　　隆
大同工業大学　都市環境デザイン学科　　正員　　　水澤　富作

1．まえがき

構造物の大型化，長大化にともない比較的シェル厚の大きな円筒シェルや極厚円筒シェルが，トンネル，サイロ，タンクや橋梁の橋脚などに採用されている．したがって，このような構造要素の振動特性を把握することが，設計上重要になっている．

厚肉円筒シェルの構造解析では，面外せん断変形，回転慣性や厚さ方向の応力-ひずみ成分の影響が無視できなくなるので，古典シェル理論の適用が困難になる．これまでにも，面外せん断変形や回転慣性の影響を近似的に考慮した厚シェル理論が提案されているが，シェル厚の増大にともない適用限界が生じてくる．したがって，厚肉円筒シェルや極厚円筒シェルのより正確な振動特性を把握するためには，3 次元弾性論に基づかなければならない．

既往の研究では，古典シェル理論を採用した報告 [1)] が多く，3 次元弾性論で理想化された任意の境界条件を有する厚肉円筒シェルの振動解析に関する報告 [2, 3)] は，非常に少ない．また，3 次元解析でしか考慮することのできない厚さ方向の振動モードに関する報告は，あまりなされていないように思われる．

本論文では，薄肉から厚肉円筒シェルの統一的な 3 次元解析が行なえる B-spline 円筒リング法を提案する．本手法を厚肉円筒シェルの自由振動解析に適用し，解の収束性や精度比較について検討を行い，本手法の適用性を明らかにすることを目的としている．

2．式の定式化

3 次元弾性論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて，B-spline 円筒リング要素を定式化する．B-spline 円筒リング法は，円周方向の変位を Fourier 展開し，軸および半径方向の変位には B-spline 関数を採用し，固有関数の直交性を利用して 3 次元問題を 2 次元問題に変換した半数値解析法である．

図-1 には，厚肉円筒シェルのモデル図が示してある．

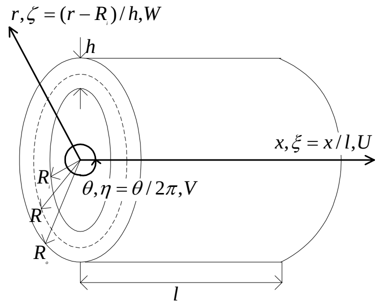

図-1　厚肉円筒シェルと無次元円筒座標系

定式化にあたり，次式で表される無次元円筒座標系を用いる．

$$\xi = x/L\,,\ \ \eta = \theta/2\pi\,,\ \ \zeta = (r - R_i)/h \tag{1}$$

ここで，$h=R_i(\delta+1)$，$\delta=R_o/R_i$，$R=R_i(\delta+1)/2$ であり，h はシェル厚，L はシェル長さ，R は中央面までの半径，R_o と R_i はそれぞれ内径および外径である．

円筒リング要素で仮定される ξ, η, ζ 方向の変位関数 U, V, W は，次式で表される．

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{l=1}^{i_r} A_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta)\cos(2\pi n\eta) \\
V &= \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{l=1}^{i_r} B_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta)\sin(2\pi n\eta) \\
W &= \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{l=1}^{i_r} C_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta)\cos(2\pi n\eta)
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，n は円周方向の波数，$i_x=k-1+M_x$，$i_r=k-1+M_r$ であり，A_{ml}, B_{ml}, C_{ml} は未定係数である．$N_{m,k}(\xi)$ と $N_{l,k}(\zeta)$ は正規化された B-spline 関数であり，k-1 は spline 次数，M_x と M_r は，それぞれ ξ, ζ 方向の要素分割数である．

厚肉円筒シェルの全ポテンシャルエネルギーΠは，次式で表される．

$$\Pi = U_p + U_b - T \tag{3}$$

ここで，U_p はひずみエネルギー，仮想バネ [4)] によるエネルギーであり，T は運動エネルギーU_b はである．

式(3)に式(2)を代入し，ポテンシャルエネルギー最小の原理と固有関数の直交性を用いれば，次式の線形

キーワード　B-spline 円筒リング法，3 次元弾性論，厚肉円筒シェル，自由振動解析
連絡先　　〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目　北海道大学大学院工学研究科　TEL: 011-706-6176

代数方程式が得られる．

$$\sum_{n=0}^{r}\left([K]_{m\,l\,i\,q}^{n\,n} - \omega^2 [M]_{m\,l\,i\,q}^{n\,n} \right)\{\Delta\}_n = 0 \qquad (4)$$

ここで，ω は円振動数[rad/sec]，剛性および質量マトリックスの大きさは，$3(k\text{-}1+M_x)(k\text{-}1+M_r)$で表される．

3．数値計算例および考察

ここでは，本手法の有用性を検討するために，無次元振動数パラメータ $n^* = \omega R\sqrt{(1-\upsilon^2)\rho/E}$ の収束性や解析精度について検討する．また，固有モードの精度についても示す．境界条件は，C-S のように表し，それぞれ，ξ 軸に垂直な 2 つの境界面(ξ=0, 1)で，固定(C)および単純支持(S)である．さらに，振動モードは，(m, n, l)のように表し，m, n は，それぞれξ, η方向の波数を，l は，厚さ方向のモード次数を表す．

図-2 には，C-C を有する円筒シェルの n^*に与える spline 次数 k-1 と要素等分割 M_x=M_r の影響が示してある．ここで，k-1 は 3 次と 4 次を採用し，M_x = M_r を 2 から 22 まで変化させている．これより，本手法は，幾何パラメータ h/R および L/R の値に関わらず，要素分割数を増大させれば，n^*の一様な収束状態を示している．また，高次要素を用いれば，10 分割程度で収束値が得られている．

以後の計算例では，k-1 = 4，M_x = M_r =12 を用いる．

表-1 には，S-S および C-C を有する円筒シェルの n^*の精度比較が示してある．比較のために，弾性論に基づく Armenakas ら [2]の解析解，Loy ら [3]の数値解および Love の理論に基づく Lam ら [1]の数値解も示してある．これより，本手法で求めた S-S の n^*は，Armenakas らの解析解とよく一致した結果が示されている．一方，C-C では，Loy らの数値解よりやや小さめな値が得られている．Loy らの数値解は，S-S で解析解と比較してやや大きめな値を示しているため，剛性を過大評価していると思われる．さらに，薄肉円筒シェルの n^*は，境界条件に関わらず Lam らの数値解とよく一致している．

図-3 には，固有モードの精度比較が示してある．採用した固有モードは，m = n = 1 での低次振動(1,1,1)および比較的高次の(1,1,5)であり，ξ = η = 0.5 での厚さ方向の W のモード形状が示してある．比較は，弾性論に基づく Armenakas ら [2]の解析解と行なった．これより，モード次数に関わらず，解析解と一致した結果が得られている．また，割愛したが，U および V も一致した結果が得られることを確認している．

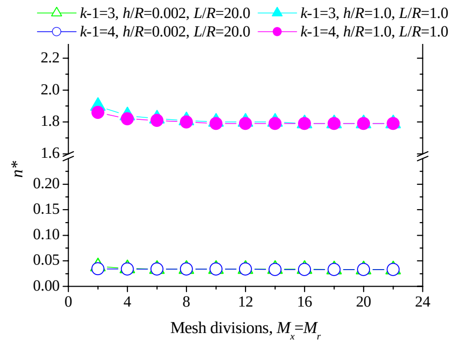

図-2　n^*に与える spline 次数と要素等分割の影響：C-C, υ=0.3

表-1　円筒シェルの n^*の精度比較：k-1=4, 12×12, υ=0.3

B.C.	h/R	L/R	Methods	modes		
S-S	0.002	20.0	Present	(0,1,1)	(1,1,1)	(1,2,1)
				0.092930	0.016101	0.005454
			Ritz[1]	0.092930	0.016101	0.005453
	0.2	1.0	Present	(1,1,1)	(1,2,1)	(1,3,1)
				0.99470	0.92110	1.00194
			Analytical[2]	0.99470	0.92110	1.00194
			FLM[3]	0.99477	0.92122	1.00213
C-C	0.002	20.0	Present	(1,1,1)	(1,2,1)	(1,3,1)
				0.03361	0.01189	0.007233
			Ritz	0.03440	0.01203	0.007222
	0.2	2.0	Present	(0,1,1)	(1,1,1)	(1,2,1)
				0.92930	0.64539	0.53890
			FLM	1.03567	0.69319	0.56971

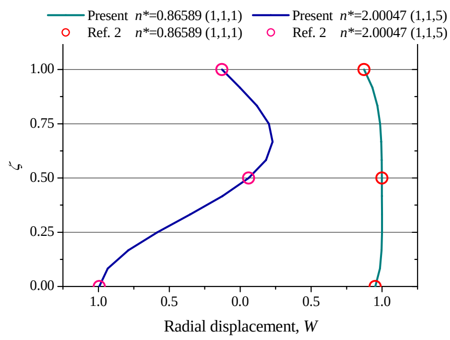

図-3　固有モードの精度比較：S-S, h/R=1.0, L/R=1.0, υ=0.3

4．まとめ

本論文で得られた知見をまとめれば，以下の通りである．1) 高次のリング要素を用いれば，少ない分割数で n^*の収束値が得られ，その収束値は解析解とよく一致している．2) 固有モードは，モード次数に関わらず，解析解と一致した結果が得られる．3) 本手法を用いれば，薄シェルから厚肉シェルまでの統一的な解析が可能であり，部分支持や変厚シェルなどを容易に取り扱うことができる．

参考文献

1）Lam and Loy: *JSV* 1995, **188** 363-384.

2）Armenakas et al.: Oxford: Pergamon Press 1969.

3）Loy and Lam: *JSV* 1999, **226** 719-737.

4）Mizusawa and Kato: *Int. Solids Struct.* 1996, **33** 967-976.