波数領域定式化に基づく領域積分方程式を用いた波動解析

東京理科大学 理工学部 正会員 東平光生[1]

1 はじめに

領域積分方程式は，波動場の媒質の揺らぎと波動方程式の解を簡潔に結びつけることができる利点を有する一方で，実際に数値的に解く場合には密で大次元の行列を解く必要に迫られる．しかしながら，領域積分方程式を波数領域で定式化すると，大次元ではあるがスパースな行列が得られることが示される．本研究では，数値計算を通して，ここで展開された手法の検証を行っている．

2 領域積分方程式の波数領域定式化

3 次元の弾性流体の波動場を考える．図-1 に示すように，揺らぎが存在する媒質を平面波が伝播する場合，次の方程式が与えられる．

$$\Big(\nabla^2 + k^2 - q(\vec{x})\Big)u(\vec{x}) = 0, \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3) \tag{1}$$

ここに，∇^2 はラプラシアン，u は速度ポテンシャル，k は媒質の波数で定数とする．また，$q(\vec{x})$ は媒質の揺らぎを表す関数である．平面波 $\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x})$ が媒質を伝播するとき，式 (1) の解は次の領域積分方程式 (Lippmann–Schwinger[1)]) 方程式を満足する．

$$u(\vec{x}) = \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) - \int_{\mathbb{R}^3} g(\vec{x},\vec{y})q(\vec{y})u(\vec{y})d\vec{y} \tag{2}$$

ここに，$g(\vec{x},\vec{y})$ は Green 関数である．式 (2) を散乱波成分 $u_s(\vec{x}) = u(\vec{x}) - \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x})$ の方程式に書き換え，Fourier 積分変換によって波数領域の方程式を導くと次のようになる．

$$\hat{u}_s(\vec{\xi}) \quad = \quad -\hat{g}(\vec{\xi})\hat{q}(\vec{\xi}+\vec{k}) - \hat{g}(\vec{\xi})\hat{w}(\vec{\xi}) \tag{3}$$

ここに，$w(\vec{y}) = q(\vec{y})u_s(\vec{y})$ であり，$\vec{\xi}$ は波数空間のベクトル，記号 ^ をつけた関数は Fourier 変換を施したことを示す．また，$\hat{g}(\vec{\xi})$ は波数領域の Green 関数である．

次に，Haar のスケーリング関数 [2)] を直交基底として式 (3) の各項を次のように展開する．

$$\hat{u}_s(\vec{\xi}) = \sum_{\alpha} \hat{u}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}), \quad -\hat{g}(\vec{\xi})\hat{q}(\vec{k}+\vec{\xi}) = \sum_{\alpha} \hat{f}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}), \quad \hat{g}(\vec{\xi})\hat{w}(\vec{\xi}) = \sum_{\alpha} c_\alpha \hat{w}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}), \tag{4}$$

ただし，ϕ_α は Haar 基底，$\vec{s}$ は $\vec{\xi} = k\vec{s}$ となるように設定している．この展開によって式 (3) は次のように表せる．

$$\hat{u}_\alpha = \hat{f}_\alpha - c_\alpha \hat{w}_\alpha \tag{5}$$

また，波数領域解から空間領域解を得るためには次のようにすれば良い．

$$\hat{u}_s(\vec{\xi}) = \sum_{\alpha} \hat{u}_\alpha \phi_\alpha(\vec{s}) \ \overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons} \ u_s(\vec{x}) = k^3 \sum_{\alpha} \hat{u}_\alpha \check{\phi}_\alpha(k\vec{x}) \tag{6}$$

ただし，$\check{\phi}_\alpha$ は ϕ_α の Fourier 逆変換である．すなわち，波数領域解から空間領域解を得るには，係数はそのままにして基底のみを取り替えれば良い．

ところで Haar のスケーリング関数は正規直交基底としての性質を持つので，その Fourier 逆変換は Parseval の等式からやはり正規直交基底としての性質がある．これを利用すると，$w(\vec{y}) = q(\vec{y})u_s(\vec{y})$ は次のように展開される．

$$\hat{w}_\alpha = \sum_{\beta,\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} \hat{q}_\beta \hat{u}_\gamma \tag{7}$$

紙面の都合上，詳細を示すことはできないが，$S_{\alpha\beta\gamma}$ は閉じた形で求めることができ，結果的にスパースな行列が得られることになる．式 (7) を式 (5) に代入することで，次の連立方程式が波数領域で導かれる．

$$\hat{u}_\alpha = \hat{f}_\alpha - c_\alpha \sum_{\beta\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} \hat{q}_\beta \hat{u}_\gamma \tag{8}$$

[1] 〒 278-8510 野田市山崎 2641, phone 04-7122-9629, fax 04-7123-9766
キーワード: Lippmann-Schwinger 方程式, Haar スケーリング関数, Parseval の等式, 波数領域定式化, スパース行列

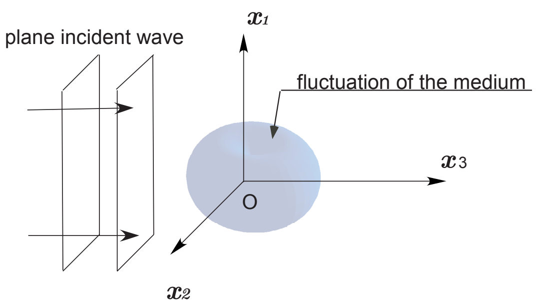

図 1: 解析モデルの概念図

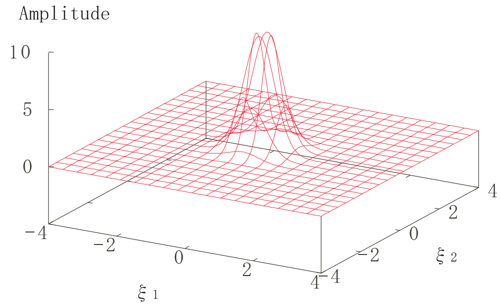

図 2: 揺らぎのスペクトル ($\hat{q}(\vec{\xi})$ at $\xi_3 = 0$).

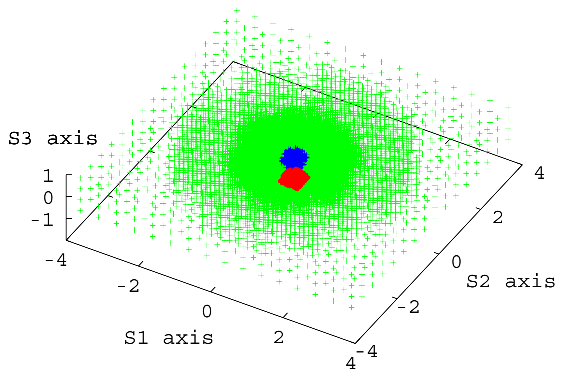

図 3: Haar 基底の解像度

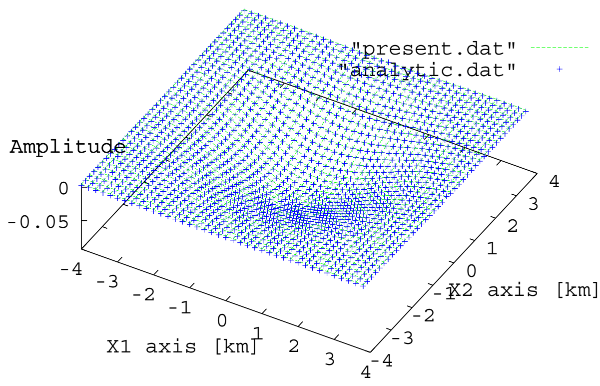

図 4: 数値計算結果の比較 ($x_3 = 1.0$ km).

3　数値計算例

ここでは媒質の揺らぎを $q(\vec{x}) = \exp(-\eta|\vec{x}|^2)$, $(\eta = 0.1)$ で与える．また，波数 $k = 2\pi$ [km^{-1}] とし，平面波の波数ベクトルを $\vec{k} = (0, 0, k)$ とする．揺らぎのスペクトルおよび Haar 基底の波数空間での配置を図-2 および 3 に示す．ただし，Haar 基底の配置は，ここでは $\vec{s}$ の座標で表現している．また，数値計算での Haar 基底は $\vec{s}$ の座標で $-10 \leq s_j \leq 10$, $(j = 1, 2, 3)$ の範囲のものを用いている．しかし，図-3 では視覚的な理解を容易にするため $-4 \leq s_1, s_2 \leq 4$, $-1 \leq s_3 \leq 1$ での Haar 基底の配置を表示した．図中，点の密度の濃い部分が Haar 基底の解像度の高い部分となり，全体として，解像度は $m = 1$ から $m = 5$ までとっている．ただし，解像度 m は波数 k は 2^m 個に分割する分解能である．原点付近の小さな青の部分は式 (3) の $\hat{q}(\vec{\xi})$ の分解に用いる Haar 基底の配置であり，この部分の解像度は $m = 4$ である．波数空間全体で見ると図 2 の揺らぎのスペクトルは非常に帯域が狭いことがわかる．また，赤の部分は式 (3) の $\hat{q}(\vec{\xi} + \vec{k})$ の分解に用いる Haar 基底の配置でここでの解像度は $m = 5$ である．ここでの解像度は，Green 関数の特異点の近くであることから高い解像度が要求される．図-3 に示す Haar 基底の配置で得られる行列は約 82000×480 であり，行列のスパース率で言えば約 0.6%である．図-4 に球関数展開による解と本手法による解の比較を示す．ここでは $x_3 = 1.0$ km でのポテンシャルの値を比較している．これによると両者はきわめて良い一致を示しており，本手法の妥当性が検証できる．

4　結論

本論文は波動解析のための領域積分方程式を波数領域で扱うことを試みた．波数領域の領域積分方程式を Haar の関数で展開し，さらに Parseval の公式を援用して波数領域と空間領域の方程式を連立させた．これによりスパースな行列が得られることになり，数値計算結果は，解析的な方法で得られる結果と良く一致した．

参考文献

1) Colton,D. and Kress, R.: *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Berlin, Springer, 1998.
2) Williams, J.R. and Amaratunga, K.: *Int. J. Num. Method. in Engineering*, **37**, pp. 2365-2388, 1994.