

薄肉はりの横倒れ後座屈現象におけるせん断変形の影響について

東京理科大学 学生員 黒澤 敦史

東京理科大学 正会員 臼木 恒雄

1. はじめに

断面複合化に伴い近年、せん断剛性の高い断面形のはりが多く使われるようになった。しかし、せん断剛性を考慮できる曲げねじり座屈理論の式は著者の知る限りでは公にされていない。横倒れ座屈の有限変位理論において、初等せん断応力によるせん断ひずみは考慮されていても、軸方向垂直応力とつり合うせん断応力によるせん断ひずみは通常無視されている。そこで本研究では、横倒れ座屈におけるせん断変形の有無が、座屈後の挙動に与える影響を定量的に把握することを目的とした。断面は広く用いられている I 形断面、および縦長の箱形断面とし、片持ちはりについて Bernoulli/Euler はりと Timoshenko はりとで座屈後の経路を比較した。

2. 解析手法

有限変形 Timoshenko はりの高次非線形支配方程式は次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} v' \\ \vdots \\ \vartheta' \\ \vdots \\ \mathcal{M}' \\ \vdots \\ \mathcal{Q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I - K^{-1}C^* & \vdots & 0 & \vdots & K^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & (\frac{1}{2}B^T + \Gamma)(I - K^{-1}C^*) & \vdots & -\frac{1}{E}(\Phi^T F^{-1}\Phi) & \vdots & (\frac{1}{2}B^T + \Gamma)K^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & -C + C^{*T}K^{-1}C^* & \vdots & 0 & \vdots & I - C^{*T}K^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & (\frac{1}{2}N^T - \Gamma^T C^*)(I - K^{-1}C^*) & \vdots & -M^T \cdot \frac{1}{E}(\Phi^T F^{-1}\Phi) & \vdots & (\frac{1}{2}N^T - \Gamma^T C^*)K^{-1} + \Gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \vdots \\ \vartheta \\ \vdots \\ \mathcal{M} \\ \vdots \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -\Phi^T \int_A p_x w dA \\ \vdots \\ \boxed{} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ -\varphi^T \int_{\Gamma} p_Q \tilde{r} ds + (\frac{1}{2}v' - \Gamma)^T \Phi^T \int_A p_x w dA \end{matrix}$$

この式は一見無秩序に見えるが、変分をとると副対角線にブロックごとに(交代)対称の係数マトリクスを得る。この事実は変位法の接線剛性マトリクス(すなわちヤコビアン)の主対角線対称性に等価である。この式のせん断剛性を無限大にもっていくと(1)式中のせん断剛性を含むマトリクス K^{-1} と、せん断ひずみのマトリクス Γ が零となり、(2)式の Bernoulli/Euler はりの支配方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} v' \\ \vdots \\ \vartheta' \\ \vdots \\ \mathcal{M}' \\ \vdots \\ \mathcal{Q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \frac{1}{2}B^T & \vdots & -\frac{1}{E}(\Phi^T F^{-1}\Phi) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & -C & \vdots & 0 & \vdots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \frac{1}{2}N^T & \vdots & -M^T \cdot \frac{1}{E}(\Phi^T F^{-1}\Phi) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \vdots \\ \vartheta \\ \vdots \\ \mathcal{M} \\ \vdots \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -\Phi^T \int_A p_x w dA \\ \vdots \\ -\varphi^T \int_{\Gamma} p_Q \tilde{r} ds + \frac{1}{2}v'^T \Phi^T \int_A p_x w dA \end{bmatrix} \quad (2)$$

上記の得られた支配方程式を基に Runge-Kutta 伝達マトリクス法により数値計算を行う。このとき係数マトリクスは状態量マトリクスの関数となっており本来であれば未知量である。そこで適当な値を仮定し、代入することによってこの係数マトリクスは既知マトリクスとなる。そこで本理論の数値計算により新たに状態量を求め、得られた状態量を再び係数マトリクスに代入し同様の計算をすることで新たな状態量を求めることができる。このような繰り返し計算を続け、係数マトリクスに代入した状態量と新たに求められた状態量が近い値となればそれらの値はこの支配方程式を満たすといえる。そのときの状態量を作用荷重ごとに求め後座屈挙動を求めた。

KeyWord：横倒れ座屈、座屈後経路、せん断変形、伝達マトリクス法、薄肉はり

連絡先：〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 Tel:04-7124-1501(内線:4070)

3. 解析例

(1) 先端に曲げを受ける片持ちはり

二軸対称のI形断面、箱形断面をもつ片持ちはりの先端にy軸まわりの曲げモーメントを受けた場合(図-1)の後座屈挙動を求めた。本解析では部材長 $L=500(\text{cm})$ 、断面高さ $H=100(\text{cm})$ 、フランジ幅 $b_f=25(\text{cm})$ 、フランジの板厚 $t_f=2(\text{cm})$ とし、ウェブの板厚はI形断面については $t_w=2(\text{cm})$ 、箱形断面については $t_w=1(\text{cm})$ とした。このとき座屈荷重はI形断面の Bernoulli/Euler はりでは $1.101 \times 10^5 (\text{kN} \cdot \text{cm})$ 、Timoshenko はりでは $1.098 \times 10^5 (\text{kN} \cdot \text{cm})$ となり、箱形断面ではそれぞれ $2.837 \times 10^6 (\text{kN} \cdot \text{cm})$ 、 $2.749 \times 10^6 (\text{kN} \cdot \text{cm})$ となる。せん断変形の影響はI形断面では0.3%、箱形断面では3.1%程度の値の差となっている。I形断面はりにおける先端部の断面の回転角、回転率を図-2,3に、箱形断面はりのそれを図-4,5にそれぞれ Bernoulli/Euler はり(点線)、Timoshenko はり(実線)について示す。縦軸は作用荷重を座屈荷重で割り無次元化してあり、横軸は各状態量となっている。I形断面については Bernoulli/Euler はりと Timoshenko はりはほとんど重なっており違いは見えてとれない。箱形断面においても回転角についてはI形断面と同じく両はりとも重なるが、回転率においては差が見えてとれる。図-6 ははりの先端部におけるI形断面、箱形断面それぞれの変形の様子である。

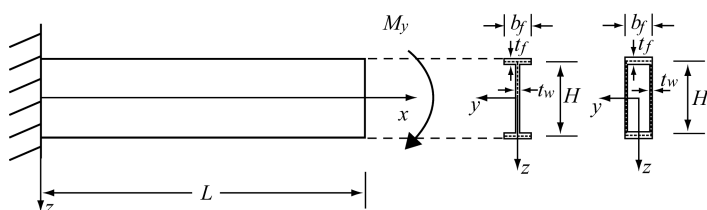


図-1: 構造系

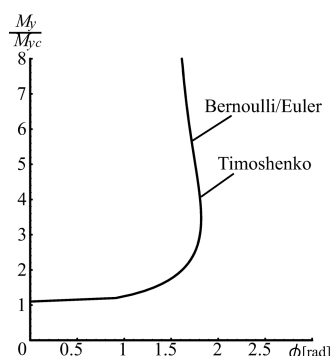
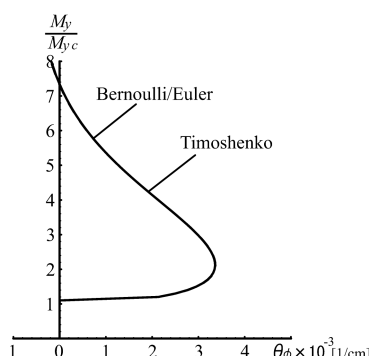
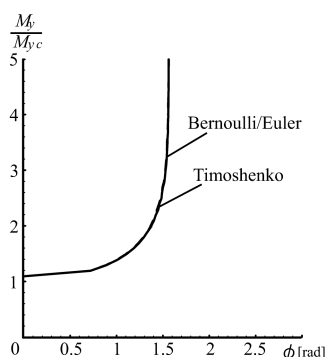
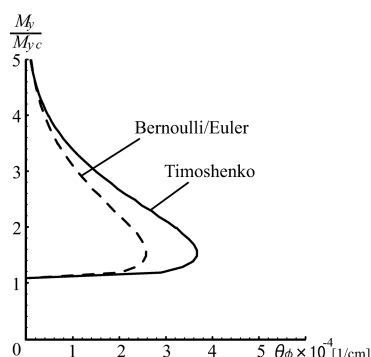
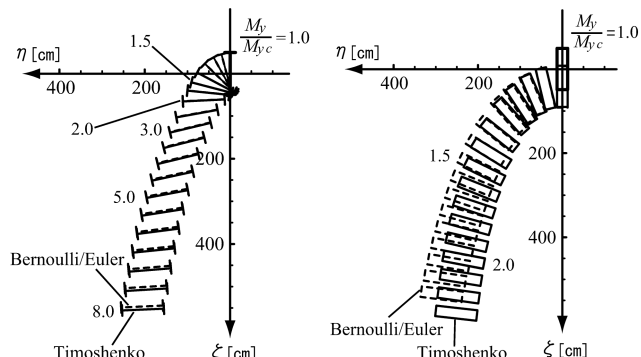
図-2: 断面回転角-荷重関係
(I 形断面)図-3: 断面回転率-荷重関係
(I 形断面)図-4: 断面回転角-荷重関係
(箱形断面)図-5: 断面回転率-荷重関係
(箱形断面)

図-6: 断面の変形過程図

4. まとめ

- [1] 有限変位理論におけるはりのせん断変形を含む高次非線形支配方程式を導いた。また高次非線形のはりの方程式を Runge-Kutta 伝達マトリクス法による単純な繰り返し計算により解き、数値解を得ることができた。
- [2] せん断変形の考慮により座屈荷重は小さくなる。また座屈後の挙動においてもその影響により変形の度合いが大きくなることを追跡できた。
- [3] せん断変形の考慮により片持ちはりでは数パーセントの座屈荷重の差を確認した。連続桁形式では十数パーセントの差になることも確認した。

[参考文献]

- 1) 白木恒雄:直交化面内関数を用いた薄肉はり有限変位理論, 土木学会論文集, No605, pp.253-264, 1998.10
- 2) 西野文雄・他:軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No225, pp.1-15, 1974.
- 3) Nagai, T. and Usuki, T. :Lateral Post-Buckling curves of Thin-Walled Beams by the Arbitrary Higher Order Perturbation Method, Proc.Sixth Int.Summer Symposium, JSCE, pp.17-20, 2004