

変断面はりの軸力幾何剛性マトリックスの展開

法政大学 学生会員 渡辺 暁*
正会員 阿井 正博

1. はじめに はり-柱理論では2次, 4次一定変断面の座屈解等が示されているが¹⁾, 汎用構造解析としては軸力幾何剛性マトリックスの適用が有効であり、以下ではその展開を一樣直線はりと同様に進める。

2. 線形解 断面の横幅 b は一定であるが、はり高が

$$h(x) = h_0(1 + \alpha \frac{x}{l}) \quad (\text{変化率 } \alpha > -1) \quad (1)$$

で直線変化する2次元直線はり要素(e)を考える：

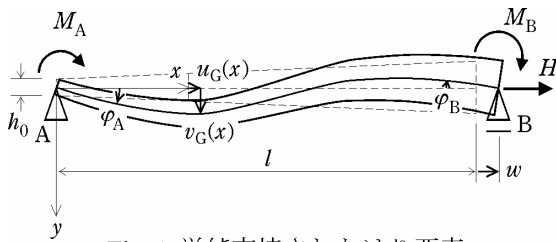


Fig. 1 単純支持されたはり要素

$$A(x) = A_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{l}\right), \quad I(x) = I_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{l}\right)^3 \quad (2)$$

変位補間形を得るために、先ず線形基礎式の解を求める。煩雑な式展開をさける手順として、両端を単純支持した上での3自由度の変形と変形力：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \{w, \varphi_A, \varphi_B\} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}_{(e)} = \{H, M_A, M_B\} \quad (3)$$

について展開する(Fig.1)。

曲げモーメントは線形分布にあり、曲げ剛性 $EI(x)$ に対して、たわみ $v_G(x)$ は基準座標 $\xi = x/l$ を用いて

$$\frac{EI_0}{l^2} (1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^2 v_G}{d\xi^2} (= -M(x)) = A + B\xi$$

にあり、2回積分した後、両端の適合条件 $v_G(0)=0$, $v_G(1)=0$ と $\theta(0)=\varphi_A$, $\theta(1)=\varphi_B$ によって

$$\text{たわみ解} : v_G(\xi) = \Gamma_{vA}(\xi)\varphi_A + \Gamma_{vB}(\xi)\varphi_B \quad (4a)$$

$$\Gamma_{vA}(\xi) = \frac{l}{C} \left\{ -\log(1 + \alpha \xi) + \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \left(-1 + \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \cdot \log(1 + \alpha) \right) \cdot \frac{\alpha \xi}{1 + \alpha \xi} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha) \right) \cdot \xi \right\} \quad (4b)$$

$$\Gamma_{vB}(\xi) = \frac{l}{C} \left\{ -(1 + \alpha) \log(1 + \alpha \xi) + \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \cdot \log(1 + \alpha) \right) \cdot \frac{\alpha \xi}{1 + \alpha \xi} + (1 + \alpha) \left(-1 + \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \log(1 + \alpha) \right) \cdot \xi \right\}$$

$$\text{ただし } C = -2\alpha + (2 + \alpha) \log(1 + \alpha) \quad (5)$$

が得られ(たわみ角 $\theta(\xi) = 1/l \cdot dv_G/d\xi$)、曲率 $\kappa(\xi)$ より $M_A = -EI_0 \kappa(0)$, $M_B = EI_0 (1 + \alpha)^3 \kappa(1)$ が決まる。

軸力は H の一定値にあり、軸方向変位 $u_G(\xi)$ との

$$\frac{EA_0}{l} (1 + \alpha \xi) \frac{du_G}{d\xi} = H : \text{const.}$$

を積分して、伸び変形 $w = u_G(1)$ に対して得られる

$$H = k_H w, \quad k_H = \frac{EA_0 \alpha}{l \log(1 + \alpha)} \quad (6a)$$

$$u_G(\xi) = \frac{\log(1 + \alpha \xi)}{\log(1 + \alpha)} \cdot w \quad (6b)$$

はこれまで用いられている。²⁾

以上の結果の変形力-変形間の剛性係数：

$$\boldsymbol{f}_{(e)} = [k_0^D]_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}, \quad [k_0^D]_{(e)} = \begin{bmatrix} k_H & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & k_{AA} & k_{AB} \\ & & k_{BB} \end{bmatrix}_{(e)} \quad (7a)$$

$$k_{AA} = \frac{EI_0}{Cl} \{ 2(1 + \alpha)^2 \log(1 + \alpha) - \alpha(2 + 3\alpha) \}$$

$$k_{AB} = k_{BA} = \frac{EI_0}{Cl} \{ -2(1 + \alpha)^2 \log(1 + \alpha) + \alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha) \} \quad (7b)$$

$$k_{BB} = \frac{EI_0}{Cl} \{ 2(1 + \alpha)^2 \log(1 + \alpha) - \alpha(1 + \alpha)^2 (2 - \alpha) \}$$

3. 軸力幾何剛性マトリックス あらかじめ比較的大きい軸圧縮力 P を受けている先行状態の上での、両端 i, j の節点力と節点変位：

$$\{\boldsymbol{F}\}_{(e)} = \{(F_x, F_y, M)_i\}_{(j)} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{u}\}_{(e)} = \{(u, v, \theta)_i\}_{(j)} \quad (8)$$

間の線形剛性関係を考える。節点変位 $\{\boldsymbol{u}\}_{(e)}$ は並進 $\{u_i, v_i\}$ と剛体回転 $\tau = (v_j - v_i)/l$ の上での変形

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix} = [Q_X]_{(e)} \{\boldsymbol{u}\}_{(e)}, \quad [Q_X]_{(e)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

として扱うものとし(Fig.2)、剛体変位後の軸線変位を線形解(4), (6b)で補間する。

先行軸力 $-P$ に加えて生じる曲げモーメント M と軸力増加 N に対して、先行状態の位置/形状を基準として全ポテンシャル・エネルギーは

$$W(\{\boldsymbol{u}\}_{(e)}) = \int_0^l \left[\frac{M^2}{2EI} + \frac{(-P + N)^2}{2EA} \right] dx - ((P + F_x)u + F_y v + M\theta)_i - ((-P + F_x)u + F_y v + M\theta)_j \quad (10)$$

にあり、増分量 $\{\boldsymbol{F}\}_{(e)}$ と $\{\boldsymbol{u}\}_{(e)}$ の線形関係では、エネルギー量は2次項までが含まれる。上式中の P は増分量ではなく、関連項は次のように展開される：

$$\int_0^l \frac{(-P + N)^2}{2EA} dx = \int_0^l \frac{P^2}{2EA} dx - \int_0^l \frac{PN}{EA} dx + \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx$$

での右辺第1, 2, 3項は、増分量 N に関する定数, 1次, 2

キーワード：変断面はり、軸力幾何剛性

*連絡先：〒184-8584 小金井市梶野町 3-7-2

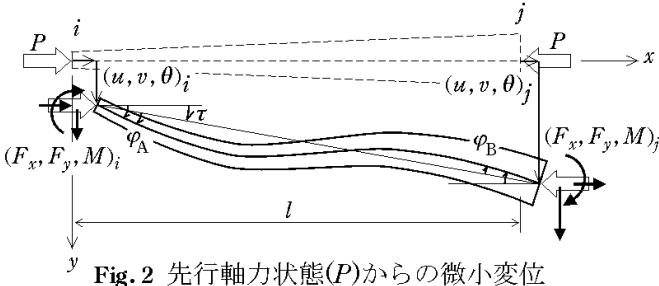


Fig. 2 先行軸力状態(P)からの微小変位

次項であり、第2項では N 自身が2次式

$$N(x) = EA(x) \left(\frac{du_G}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_G}{dx} \right)^2 \right)$$

で表される必要がある(第3項には $N = EA(du_G/dx)$)。

$$\begin{aligned} -\int_0^l \frac{PN}{EA} dx &= -P \int_0^l \left(\frac{du_G}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_G}{dx} \right)^2 \right) dx \\ &= -P(u_G(l) - u_G(0)) - \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dv_G}{dx} \right)^2 dx \end{aligned}$$

において、 $u_G(0) = u_i$, $u_G(l) = u_j$ の初項は式(10)中で節点力項の $-Pu_i$, Pu_j と相殺され、次項は、たわみ $v_G(x)$ による長さの縮小分 Δ との積 $-P\Delta$ を表す。

変形での変位補間(4b)のたわみ角 $\theta(\xi) = \Gamma_{\theta A}(\xi) \varphi_A + \Gamma_{\theta B}(\xi) \varphi_B$, ($\Gamma_{\theta A}(\xi) = 1/l \cdot d\Gamma_{vA}(\xi)/d\xi$, $\Gamma_{\theta B}(\xi) = 1/l \cdot d\Gamma_{vB}(\xi)/d\xi$) において、縮小分 Δ^D に関する積分結果は

$$\begin{aligned} \Delta^D(\varphi_A, \varphi_B) &= \left(\frac{l}{2} \left\{ \int_0^1 \Gamma_{\theta A}^2 d\xi \cdot \varphi_A^2 + 2 \int_0^1 \Gamma_{\theta A} \Gamma_{\theta B} d\xi \cdot \varphi_A \varphi_B + \int_0^1 \Gamma_{\theta B}^2 d\xi \cdot \varphi_B^2 \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \langle \varphi_A \quad \varphi_B \rangle [\eta^D] \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix}, \quad [\eta^D] = \begin{bmatrix} \eta_{AA} & \eta_{AB} \\ \eta_{BA} & \eta_{BB} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \eta_{AA} &= \frac{l}{3C^2} \left\{ -\frac{\alpha}{(1+\alpha)} + 7\alpha \right\} + (-5\alpha^2 - 12\alpha) \cdot \left(\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \right) + \left(\alpha^3 + 4\alpha^2 + 6\alpha \right) \left(\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \right)^2 \Big\} \\ \eta_{AB} = \eta_{BA} &= \frac{l(1+\alpha)}{3C^2} \left\{ \left(\frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)} \right) + \left(\frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \right) - \frac{\alpha}{2}(1+\alpha) \left(\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \right) - \alpha^2 \left(\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \right)^2 \right\} \\ \eta_{BB} &= \frac{l(1+\alpha)^2}{3C^2} \left\{ -\frac{7\alpha}{(1+\alpha)} + \alpha \right\} + \left(\frac{5\alpha}{(1+\alpha)} + 7\alpha \right) \cdot \left(\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \right) + \left(-\frac{\alpha}{(1+\alpha)} - 3\alpha^2 - 5\alpha \right) \left(\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \right)^2 \Big\} \end{aligned} \quad (11b)$$

となる。節点変位 $\{\mathbf{u}\}_{(e)}$ に対して、たわみ角は $\theta(\xi) = \tau + \Gamma_{\theta A}(\xi) \varphi_A + \Gamma_{\theta B}(\xi) \varphi_B$ にあるが、 $\Gamma_{\theta A}(\xi)$, $\Gamma_{\theta B}(\xi)$ は単純支持でのたわみ角分布形であって積分値 $\int_0^1 \Gamma_{\theta A} d\xi (= \Gamma_{vA}(1)/l) = 0$, $\int_0^1 \Gamma_{\theta B} d\xi (= \Gamma_{vB}(1)/l) = 0$ より、 Δ 中での τ と φ_A , φ_B の相乗項は消失して、式(9)のもとに

$$\Delta = \left(\frac{l}{2} \tau^2 + \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}_{(e)}^T [Q_X]_{(e)}^T [\eta^D] [Q_X]_{(e)} \{\mathbf{u}\}_{(e)} \right) \quad (12a)$$

$$= \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}_{(e)}^T [\eta] \{\mathbf{u}\}_{(e)} \quad (12b)$$

$$[\eta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_{AA} + 2\eta_{AB} + \eta_{BB}}{l^2} + \frac{1}{l}, & \frac{\eta_{AA} + \eta_{AB}}{l}, & \eta_{AA}, \\ \text{Sym.} & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\eta_{AA} + 2\eta_{AB} + \eta_{BB}}{l^2} - \frac{1}{l}, & \frac{\eta_{AB} + \eta_{BB}}{l} \\ 0 & -\frac{\eta_{AA} + \eta_{AB}}{l}, & \eta_{AB} \\ 0 & \frac{\eta_{AA} + 2\eta_{AB} + \eta_{BB}}{l^2} + \frac{1}{l}, & -\frac{\eta_{AB} + \eta_{BB}}{l} \\ & & \eta_{BB} \end{bmatrix}$$

に展開される。式(10)の全ポテンシャルでの M , N の2次項は、前節の線形解を変位補間としていることより式(7)の変形力-変形間でのひずみエネルギーに一致する関係にあり、 W の $\{\mathbf{u}\}_{(e)}$ に関する停留条件より決まる剛性マトリックスは、各成分展開は複雑であるが、一様断面などと同形式に得られる：

$$\{\mathbf{F}\}_{(e)} = ([k_0]_{(e)} + [k_G]_{(e)}) \{\mathbf{u}\}_{(e)}$$

$$\text{初期剛性: } [k_0]_{(e)} = [Q_X]_{(e)}^T [k_0^D]_{(e)} [Q_X]_{(e)} \quad (13)$$

$$\text{軸力幾何剛性: } [k_G]_{(e)} = -P[\eta]$$

4. 数値計算例 長さ10mの矩形等断面柱($b_0=40$, $h_0=20$ cm, $E=20600$ kN/cm²)を基準として、体積維持のもとに自由端⇄固定端間の断面高さを $\{h_T, h_B\} = h_0\{1-\gamma, 1+\gamma\}$ で変えたときの座屈荷重を、4要素分割で固有値計算した。 $\gamma=0.4$ 程度で最大荷重値 $P_{cr}=1760$ kNとなり、それ以上の断面変化では座屈変位が自由端側に集中して座屈荷重は減少している。

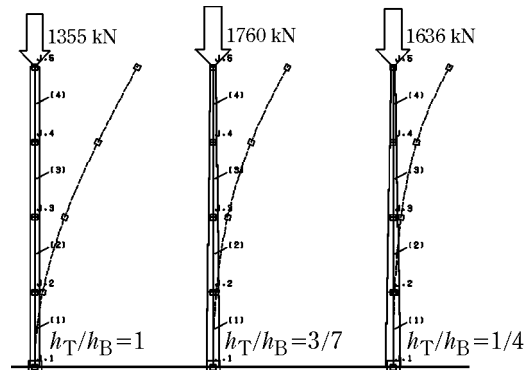


Fig. 3 片端固定柱の座屈荷重と座屈モード

<参考文献> 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability (2nd Ed.), McGraw-Hill, New York, 1961. / 2) 林 正・岩崎英治 : ハイラーキ要素による骨組構造解析, 土木学会論文集, No.570, 1997-7.