

有限要素法において壁関数を具体化する際の物体の角の扱いに関する検討

日本大学理工学部 正会員 ○長谷部 寛
日本大学理工学部 正会員 野村 卓史

1. はじめに レイノルズ平均型モデルを用いた乱流解析において、物体境界を扱う手法の一つに壁関数¹⁾がある。有限要素法において壁関数を用い、壁乱流の対数則から評価される壁面せん断応力を境界条件として、物体境界上節点の接線方向流速を未知数として扱う場合、角柱の四隅のような物体の角にあたる節点では接線方向が一意的に定まらないという問題が生じる。本研究では、有限要素法において壁関数を用いる際、物体の角の節点の接線方向を評価する方法として、幾何形状より評価する場合と幾何形状と周辺の流速から評価する場合の二通りを比較検討した。

2. 物体境界上節点の自由度と壁関数の流速参照位置 本研究では、物体境界が全体座標系と一致しない場合を想定し、物体境界上節点に限り、流速の自由度を接線方向成分 $\bar{u}_j$ および法線方向成分 $\bar{v}_j$ として扱い $\bar{u}_j$ を未知数、 $\bar{v}_j$ をゼロとする。着目する物体境界上節点 j における流速の x 方向および y 方向成分 u_j, v_j と、接線および法線方向成分 $\bar{u}_j, \bar{v}_j$ との幾何学的関係を図1に示す。

壁関数により求まる壁面せん断応力は、要素の辺上で定義する。壁関数より壁面せん断応力を求める際の流速参照点を境界上の辺の中点とする。図1に示す辺 a 上の参照流速 $U_{ref,a}$ は、その両端の節点 i, j の接線方向流速 $\bar{u}_i, \bar{u}_j$ から次式のように内挿する。

$$U_{ref,a} = \left\{ \bar{u}_i \cdot \cos(\bar{\theta}_i - \hat{\theta}_a) + \bar{u}_j \cdot \cos(\bar{\theta}_j - \hat{\theta}_a) \right\} / 2 \quad (1)$$

ここで、 $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j$ はそれぞれ節点 i, j の接線方向であり、 $\hat{\theta}_a$ は辺 a の傾きである。ここから壁面せん断応力 $\tau_{w,a}$ は、

$$\left[y^+ \geq 11.63 \right] \quad \tau_{w,a} = -\frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} \hat{k}_a^{1/2}}{\ln(C_E y^+)} \cdot U_{ref,a} \quad (2)$$

$$\left[y^+ < 11.63 \right] \quad \tau_{w,a} = -\mu \frac{U_{ref,a}}{\delta_w} \quad (3)$$

$$\left(y^+ = C_\mu^{1/4} \hat{k}_a^{1/2} \delta_w / \nu, C_\mu = 0.09, C_E = 9.793, \kappa = 0.4187 \right)$$

として求める。 $\hat{k}_a$ は物体境界上節点の値から内挿された流速参照点の乱流エネルギーである。なお、 k, ε 方程式の境界条件は Launder-Spalding の方法¹⁾に従った。その際、参照流速として接線方向流速 $\bar{u}_j$ を用いた。

3. 物体境界上節点の接線方向 物体境界上節点の接線方向の評価方法として以下の二通りを検討した。

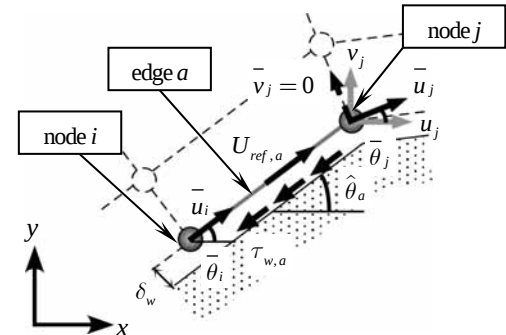


図1 物体の角の節点における流速の扱い

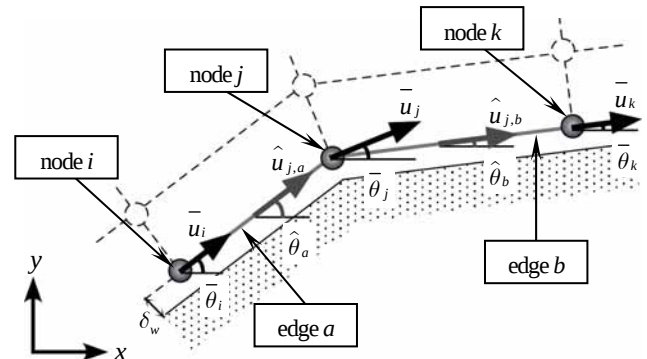


図2 接線方向を評価する際の記号の定義

(case1) 幾何形状から評価する場合

図2に示す境界上節点 j の接線方向 $\bar{\theta}_j$ を左右の辺 a, b の傾き $\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b$ から以下のように定義する。

$$\bar{\theta}_j = (\hat{\theta}_a + \hat{\theta}_b) / 2 \quad (4)$$

(case2) 幾何形状と周辺の流速から評価する場合

この評価方法は case1 と異なり、流速の変化に伴い接線方向も変化する。境界上節点 j の $(N+1)$ 時間ステップの接線方向 $\bar{\theta}_j^{(N+1)}$ を求める手順は以下の通りである。

図2に示す辺 a, b 上で定義される边上流速 $\hat{u}_{j,a}, \hat{u}_{j,b}$ を、節点 j とその両隣の節点 i, k の接線方向流速 $\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_k$ を用いて次式のように評価する。

$$\hat{u}_{j,a}^{(N+1)} = \frac{1}{3} \left\{ \bar{u}_i^{(N)} \cos(\bar{\theta}_i^{(N)} - \hat{\theta}_a) \right\} + \frac{2}{3} \left\{ \bar{u}_j^{(N)} \cos(\bar{\theta}_j^{(N)} - \hat{\theta}_a) \right\} \quad (5a)$$

$$\hat{u}_{j,b}^{(N+1)} = \frac{2}{3} \left\{ \bar{u}_j^{(N)} \cos(\bar{\theta}_j^{(N)} - \hat{\theta}_b) \right\} + \frac{1}{3} \left\{ \bar{u}_k^{(N)} \cos(\bar{\theta}_k^{(N)} - \hat{\theta}_b) \right\} \quad (5b)$$

ここで、流速は辺 a, b 上で線形に分布していると仮定している。続いて边上流速 $\hat{u}_{j,a}, \hat{u}_{j,b}$ から、以下の式で表される流速の重み $W_{j,a}, W_{j,b}$ を計算する。

キーワード：有限要素法，壁関数，物体の角，斜めの境界

連絡先：〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14

TEL/FAX 03-3259-0411

$$W_{j,a}^{(N+1)} = \hat{u}_{j,a}^{(N+1)} / \left(\left| \hat{u}_{j,a}^{(N+1)} \right| + \left| \hat{u}_{j,b}^{(N+1)} \right| \right) \quad (6a)$$

$$W_{j,b}^{(N+1)} = \hat{u}_{j,b}^{(N+1)} / \left(\left| \hat{u}_{j,a}^{(N+1)} \right| + \left| \hat{u}_{j,b}^{(N+1)} \right| \right) \quad (6b)$$

そして、辺 a, b の傾き $\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b$ に対し、 $W_{j,a}, W_{j,b}$ により流速による重み付けをすることで、境界上節点 j の接線方向 $\bar{\theta}_j$ を、次式から評価する。

$$\bar{\theta}_j^{(N+1)} = W_{j,a}^{(N+1)} \cdot \hat{\theta}_a + W_{j,b}^{(N+1)} \cdot \hat{\theta}_b \quad (7)$$

4.2 次元正方形角柱周りの流れの解析

2 次元正方形角柱周りの流れの解析を行い、角柱の四隅の接線方向を 3 節で記した case1, case2 に従って評価し、角柱に作用する空気力を比較した。解析手法は、離散化手法として有限要素法を用い、流速に関しては双線形補間関数、圧力に関しては要素内一定の補間関数を用い、SUPG 法²⁾により離散化した。時間積分法には予測子・修正子法²⁾を用いた。また、計算安定化のために、 k, ε の対数をとった K, E の方程式を解く logarithmic form³⁾を適用した。

図 3 に解析条件を示す。乱流モデルには修正 $k-\varepsilon$ モデル⁴⁾を用い、流出境界の境界条件 Γ_3 中の記号 Σ は、応力テンソルおよびレイノルズ応力の和であり、流体の総応力を表す。

表 1 に空気力係数の結果を示す。加藤の解析結果⁴⁾も併せて示した。case2 は加藤の結果に近い値が得られたが、case1 は空気力係数が過小に評価された。

表 2 に角柱の四隅の節点の接線方向を示し、図 4, 5 には揚力が最大となった瞬間の角柱前縁角付近および上面の流速ベクトルを示す。表 2、図 4 より case1 は前縁角の流速ベクトルの傾きが case2 と比べ小さいことがわかる。そのため、図 5 に示すように上面に形成される渦も小さくなり、空気力係数が過小に評価されたと考えられる。

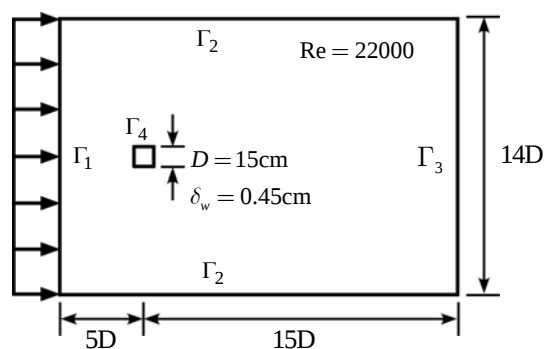
5. 結論 本研究では有限要素法において壁関数を具体化する際、物体の角にあたる節点の接線方向の評価方法に関し検討した。2 次元正方形角柱の解析において、接線方向を幾何形状のみから評価した場合 (case1)、前縁からの剥離を小さく評価してしまい、空気力係数を過小に評価する結果となった。一方、幾何形状と周辺の流速から毎ステップごと接線方向が更新される扱いとした場合 (case2)、前縁からの剥離を過小に評価することなく、空気力係数は妥当な値が得られた。

【参考文献】 1) Launder, B.E. and Spalding, D.B. : Comp. Meth. Appl. Eng., 3, pp.269-289, 1974

2) A.N.Brooks and T.J.R.Hughes : Comp. Meth. Appl. Eng., 32, pp.199-259, 1982,

3) F.Ilinca and D.Pelletier : AIAA J., Vol.36, No.1, pp.44-50, 1998

4) 加藤真志 : 土木学会論文集, No.577/I-41, pp.217-230, 1997



$$\Gamma_1: U_{in} = 214.3 \text{ cm/s}, I_u = 2\%, k = (I_u U_{in})^2, \nu_t = 100\nu$$

$$\Gamma_2: V = \partial K / \partial \mathbf{n} = \partial E / \partial \mathbf{n} = 0$$

$$\Gamma_3: \Sigma \cdot \mathbf{n} = \partial K / \partial \mathbf{n} = \partial E / \partial \mathbf{n} = 0$$

$$\Gamma_4: \text{Wall Function}$$

図 3 解析条件

表 1 空気力係数の比較

	$\bar{C}_D$	$C_{L \max}$
case1	1.57	0.12
case2	2.13	1.05
Kato	2.05	1.2

表 2 角柱四隅の節点の接線方向と変動範囲

Corner	A	B	C	D
case1	45° (不変)	315° (不変)	135° (不変)	215° (不変)
case2	64.5° ±2.5°	295.8° ±2.3°	143.1° ±13.9°	217.3° ±13.9°

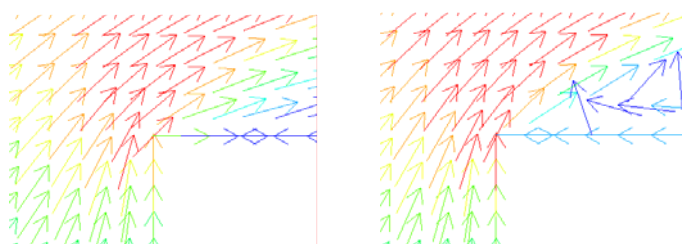
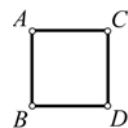


図 4 角柱前縁角の節点の接線方向 (左: case1, 右: case2)

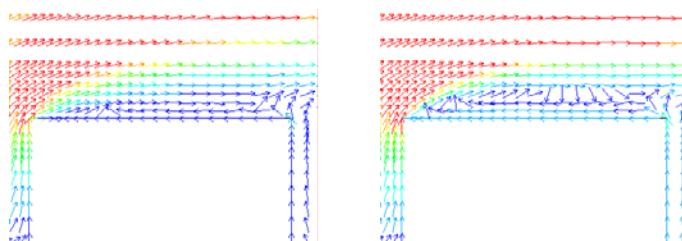


図 5 角柱上面の流速ベクトル (左: case1, 右: case2)