

安定化有限要素法を用いた LES 乱流モデルの検証

中央大学大学院 学生員 ○ 仲嶋 晋一
奥村組 学生員 倉橋 哲弘
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

工学的な流れや、自然界の流れの多くは乱流状態にある。乱流の予測には、実験や観測が行われてきたが、近年計算機の発達に伴い、乱流の予測に対して計算機による数値解析が多く用いられるようになってきた。これまで、乱流の数値解析手法には構造格子を前提とした差分法による方法が多く用いられていた。しかし、これらの手法は任意形状への適用が容易ではないため、非構造格子に基づく高精度な乱流の数値解析手法の必要性が高まってきている。

そこで本論文は、任意形状に適した四面体要素に基づく安定化有限要素法における LES の有効性を検証することを目的とするものである。LES 乱流モデルには、Smagorinsky モデル¹⁾、Mixed モデル²⁾、Dynamic SGS モデル³⁾、混合時間スケールモデル⁴⁾を使用し、スペクトル法による DNS⁵⁾との比較のもとに検討を行った。

2. 支配方程式

非定常・非圧縮・粘性流体の流れは、非圧縮 Navier-Stokes 方程式、連続式によって支配されている。これらに対してフィルター操作を施すことにより LES の支配方程式が導出される。LES の支配方程式は (1)、(2) 式で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - f_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij} + 2\nu \bar{D}_{ij}) \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (2)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ は i 方向の流速の GS 成分、 f_i は i 方向の物体力、 ρ は流体の密度である。 P は総圧、 $\bar{D}_{ij}$ は変形速度テンソルであり、それぞれ (3) 式で表される。

$$P = \bar{p} + \frac{1}{3} \overline{u'_k u'_k}, \quad \bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

ここで、 $\bar{p}$ は圧力の GS 成分、 u'_i は i 方向の流速の SGS 成分である。 τ_{ij} は SGS 応力項であり、(4) 式で表される。

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \equiv L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (4)$$

ここで、 L_{ij} 、 C_{ij} 、 R_{ij} はそれぞれ Leonard 項、Cross 項、SGS Reynolds 応力項とよばれている。

本論文で使用した乱流モデルを以下に示す。

まず、Smagorinsky モデル¹⁾ (SM) における SGS 応力項は (5) 式で与えられる。

$$\tau_{ij} = -2\nu_e \bar{D}_{ij}, \quad \nu_e = (C_s f_s \bar{\Delta})^2 |\bar{D}| \quad (5)$$

ここで、 C_s は Smagorinsky 定数、 ν_e は SGS 渦粘性係数である。 $\bar{\Delta}$ 、 $|\bar{D}|$ は (6) 式で与えられる。

$$\bar{\Delta} = V_e^{\frac{1}{3}}, \quad |\bar{D}| = \sqrt{2\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij}} \quad (6)$$

ここで、 V_e は四面体要素の体積である。 f_s は Van Driest 関数であり (7) 式で表される。

$$f_s = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right), \quad A^+ = 25, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (7)$$

ここで、 y^+ は壁座標、 y は壁面からの距離、 u_τ は壁面摩擦速度である。

次に、Mixed モデル²⁾ (MM) における SGS 応力項は (8) 式で与えられる。

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j - 2(C_s f_s \bar{\Delta})^2 |\bar{D}| \bar{D}_{ij} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{f}$ は二重フィルター操作値である。

次に、Dynamic SGS モデル³⁾ (DSM) における SGS 応力項は (9) ~ (12) 式で与えられる。

$$\tau_{ij} = -2\nu_e \bar{D}_{ij}, \quad \nu_e = C \bar{\Delta}^2 |\bar{D}| \quad (9)$$

$$C \bar{\Delta}^2 = -\frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij}^\alpha M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle}, \quad C = C_s^2 \quad (10)$$

$$L_{ij}^\alpha = L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk}, \quad L_{ij} = \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (11)$$

$$M_{ij} = \alpha^2 \left| \widetilde{\bar{D}} \right| \widetilde{\bar{D}_{ij}} - \left| \widetilde{\bar{D}} \right| \bar{D}_{ij}, \quad \alpha = \frac{\widetilde{\bar{\Delta}}}{\bar{\Delta}} = 2 \quad (12)$$

ここで、 $\widetilde{\bar{\Delta}}$ はテストフィルター幅、 $\langle f \rangle$ は f に対しての何らかの平均化操作を表す。 $\widetilde{\bar{f}}$ はテストフィルター操作値、 α はグリッドフィルター幅とテストフィルター幅の比であり、 $\alpha = 2$ が推奨されている。

次に、混合時間スケールモデル⁴⁾ (MTSM) における SGS 応力項は (13)、(14) 式で与えられる。

$$\tau_{ij} = -2\nu_e \bar{D}_{ij}, \quad \nu_e = C_{MTS} k_{es} T_s \quad (13)$$

$$k_{es} = \sum_{k=1}^3 \left(\bar{u}_k - \widetilde{\bar{u}_k} \right), \quad T_s^{-1} = \left(\frac{\bar{\Delta}}{\sqrt{k_{es}}} \right)^{-1} + \left(\frac{C_T}{|\bar{D}|} \right)^{-1} \quad (14)$$

ここで、 C_{MTS} 、 C_T はモデル定数でありそれぞれ 0.05、10 で与えられる。

ここで二重フィルター操作値、テストフィルター操作値の求め方の説明をする。MM の二重フィルター操作値、DSM、MTSM のテストフィルター操作値は Gaussian フィルターを用いることにより、それぞれ (15) 式で表される。

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f} + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2}, \quad \widetilde{\bar{f}} = \bar{f} + \frac{(\alpha^2 - 1) \bar{\Delta}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} \quad (15)$$

KeyWords： 安定化有限要素法、四面体要素、LES

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: shinichi@civil.chuo-u.ac.jp

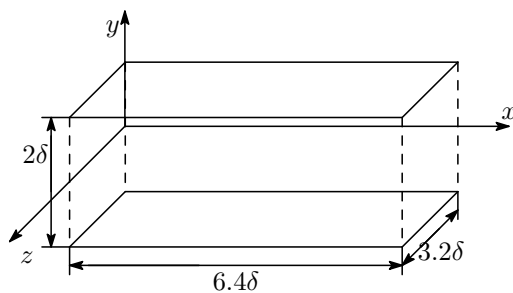


図-1 解析領域

表-1 数値解析条件

初期条件	DNS データベース ⁵⁾ に 乱数を付加した値
境界条件	x, z 方向: Periodical 条件 y 方向: Non-slip 条件
有限要素分割 ($x \times y \times z$)	$32 \times 40 \times 32$ 分割
有限要素分割幅数 ($\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$)	30, 1 ~ 14, 15
Reynolds 数	150
微小時間増分量	5.0×10^{-4}
Smagorinsky 定数	0.10
連立 1 次方程式の解法	E-by-E Bi-CGSTAB2 法 Multi-pass 法 (反復回数 3 回)

ここで, DSM では $\alpha = 2$, MTSM では $\alpha = \sqrt{5}$ を採用した。

本論文では (1), (2) 式に SUPG/PSPG 法⁶⁾に基づく安定化有限要素法を適用し, P1/P1 要素を用いて空間方向に離散化し, 有限要素方程式を得た。時間方向の離散化については, 移流速度に 2 次精度 Adams-Bashforth 法, 移流速度以外の流速に Crank-Nicolson 法 (2 次精度) を用い, 圧力項, SGS 応力項, 連続式を陰的に扱った。

3. 数値解析例

(1) 解析条件

数値解析例として, 2δ の流路幅を有する Channel 流れ問題を扱った。この解析例では, すべての物理量が無次元量であるため, 支配方程式を δ, u_τ, ρ で無次元化して数値解析を行った。流れを保持するために $f_1 = 1.0$ を外力項として与えた。解析領域を図-1 に, 数値解析条件を表-1 に示した。本論文では, 大規模計算に対して有効な, 領域分割法に基づく並列計算法を採用した。領域分割数を 16, x 方向に 8 等分割, z 方向に 2 等分割とした。通信ライブラリーには MPI を用いた。

計算は, 表-1 に示した初期条件で無次元時間 40 まで計算し, 無次元時間 0 ~ 40 での平均流速, 乱流強度を初期条件としてさらに無次元時間で 40, 計 80 計算した。

(2) 解析結果

図-2, 3 に, 無次元時間 40 ~ 80 における乱流モデルによる比較を示した。図-2 は平均流速図を, 図-3 は乱流強度図を示した。

図-2 では, モデル間に大きな差異は見られなかったが, やや MM が他のモデルに比べ精度が落ちる結果となった。

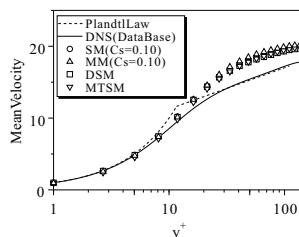


図-2 平均流速図

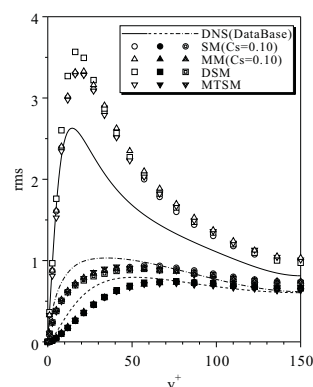


図-3 乱流強度図

図-3 では, DSM が他のモデルに比べ主流方向の乱流強度を過大評価する結果となった。

全てのモデルにおいて平均流速, 主流方向の乱流強度を過大評価し, 主流方向以外の乱流強度を過小評価した原因は, 格子解像度の不足に起因すると考えられる。

本論文で使用した乱流モデルの中では複雑形状への適用性を考えると, 壁関数を用いていない点と SM 程度の精度を有する点から MTSM が最も優れていると考えられる。

4. おわりに

本論文は, 任意形状に適した四面体要素に基づく安定化有限要素法における LES の有効性を検証することを目的とし, 乱流モデルの違いによる影響について, スペクトル法による DNS⁵⁾ との比較のもとで検討を行った。その結果以下の結論を得た。

- 平均流速については, モデル間に大きな差異は見られなかった。
- 乱流強度については, DSM³⁾ が主流方向の乱流強度を過大評価した。
- 本論文で使用した乱流モデルの中では複雑形状への適用性を考えると, MTSM⁴⁾ が最も優れていると考えられる。

今後の課題として, 複雑形状への拡張を行うとともに, 高 Reynolds 数での数値解析を行うことが挙げられる。

参考文献

- 1) J. Smagorinsky: General circulation experiments with the primitive equation I. the basic experiment, Monthly Weather Review, **91**, pp.99-164, 1963.
- 2) Piomelli, U., Moin, P. and Ferziger J.H.: Model consistency in large eddy simulation of turbulent channel flows, Phys. Fluids, **31**, 1984.
- 3) D. K. Lilly: A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, Physics of Fluids, **A4(3)**, pp.633-635, 1992.
- 4) 稲垣昌英, 近藤継男, 長野靖尚: 実用的な LES のための混合時間スケール SGS モデル, 日本機械学会論文集 B 編, **68-673**, pp.2572-2579, 2002.
- 5) K. Iwamoto, Y. Suzuki and N. Kasagi: Reynolds number effect on wall turbulence, International Journal of Numerical Method for Heat and Fluid Flow, **23**, pp.678-689, 2002.
- 6) Tayfun E. Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, **28**, pp.1-44, 1992.