

主応力成分に対していろいろな方向を持つ面に関するクーロン基準

東京都立大学 正会員 吉嶺 充俊

最大・中間・最小主応力成分 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の方向に対するクーロンの破壊基準(あるいは降伏基準)を適用する基準面の方向余弦成分をそれぞれ s_1, s_2, s_3 としたとき、クーロンの基準は

$$\tau = R\sigma + C \quad [1]$$

$$\sigma = s_1^2 \sigma_1 + s_2^2 \sigma_2 + s_3^2 \sigma_3 \quad [2]$$

$$\tau = (s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2 + s_3^2 \sigma_3^2 - \sigma^2)^{1/2} = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 s_1^2 s_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 s_2^2 s_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 s_3^2 s_1^2]^{1/2} \quad [3]$$

と表される。ここに、 R と C はそれぞれ物質の摩擦係数と粘着力である。方向余弦成分については常に $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ なので、2つの独立な方向パラメータを $\alpha = (s_1/s_3)^2$, $\beta = (s_2/s_3)^2$ とおけば、基準面に作用する直応力成分 σ と最大せん断応力成分 τ は

$$\sigma = (\alpha + \beta + 1)^{-1} (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 + \sigma_3) \quad [4]$$

$$\tau = (\alpha + \beta + 1)^{-1} [\alpha \beta (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \beta (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \alpha (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad [5]$$

とも表される。一般的な物質では $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ と考えられる。

特に、非粘着性物質($C=0$)の場合には、クーロン基準[1]は

$$s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2 + s_3^2 \sigma_3^2 = (R^2 + 1) (s_1^2 \sigma_1 + s_2^2 \sigma_2 + s_3^2 \sigma_3)^2 \quad [6]$$

あるいは

$$(\alpha + \beta + 1) (\alpha \sigma_1^2 + \beta \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = (R^2 + 1) (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad [7]$$

となる。

これらの基準面の方向パラメータ s_1, s_2, s_3 あるいは α, β の組み合わせを様々に変化させると、種々の破壊基準(あるいは降伏基準)を表現することができる(吉嶺, 2004)。たとえば、 $\alpha = 1, \beta = 0, R = 0$ はトレスカの基準を表し、 $\alpha = 1, \beta = 1, R = 0$ はフォンミーゼスの基準を表し、 $\alpha = [1 - R(1 + R^2)^{-1/2}][1 + R(1 + R^2)^{-1/2}]^{-1}, \beta = 0$ はモール・クーロンの基準を表す。

ところで、主応力成分 σ_i, σ_j に関して応力状態が $\sigma_i \rightarrow \sigma_j$ であれば、破壊・降伏現象は i 軸と j 軸に対して対称となり、基準面の方向も $s_i \rightarrow s_j$ となっているはずである。すなわち、方向パラメータは主応力の関数であり、

$$\sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{のとき} \quad s_2 = s_3, \quad \beta = 1 \quad [8]$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \quad \text{のとき} \quad s_2 = s_1, \quad \beta = \alpha \quad [9]$$

となっていると考えられる。もちろん s_1, s_2, s_3 および α, β は無次元量でなければならない。条件[8] [9]は、応力空間内で破壊応力面(あるいは降伏面)に角張りができずに滑らかである条件にもなっている。

条件[8] [9]を満たす方向パラメータは無数に考えられるが、ここでは、

$$\alpha = (\sigma_3/\sigma_1)^k, \quad \beta = (\sigma_3/\sigma_2)^k \quad [10]$$

とおいてみる。 k は物質のせん断特性を表す定数である。特に、非粘着性物質($C=0$)の場合には、クーロン基準[1]は次のような形になる。

$$[(\sigma_1 \sigma_2)^k + (\sigma_2 \sigma_3)^k + (\sigma_3 \sigma_1)^k] (\sigma_1^{(2-k)} + \sigma_2^{(2-k)} + \sigma_3^{(2-k)}) = (R^2 + 1) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^k (\sigma_1^{(1-k)} + \sigma_2^{(1-k)} + \sigma_3^{(1-k)})^2 \quad [11]$$

一般に、 $k=0$ のとき基準面は正八面体面となり、クーロン基準[1]は $R=0$ に対してフォンミーゼスの基準、 $C=0$ に対して拡張フォンミーゼスの基準を表す。また $k=1$ のとき基準面は空間滑動面(SMP)であり、クーロ

キーワード 降伏基準, 破壊基準, せん断強さ

連絡先 〒192-0937 東京都八王子市南大沢 1-1 東京都立大学大学院工学研究科土木工学専攻 TEL 0426-77-2773

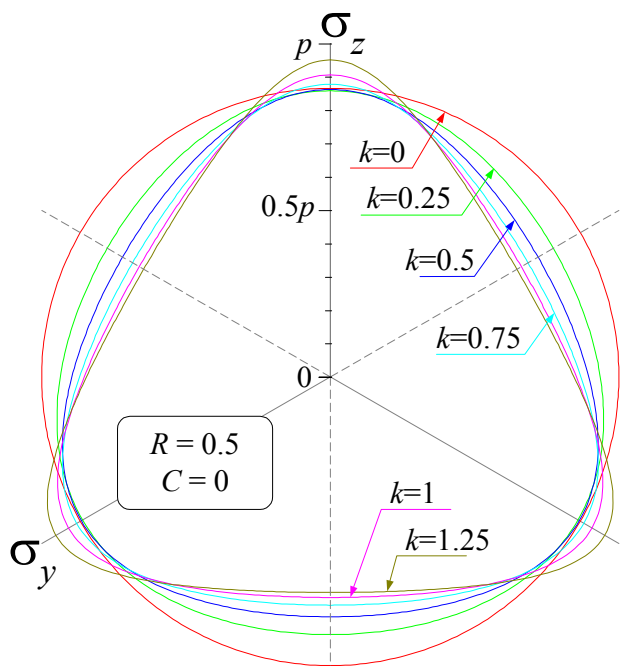


図1 π 平面上の応力基準面の形状
($R = 0.5, C = 0$ の場合)

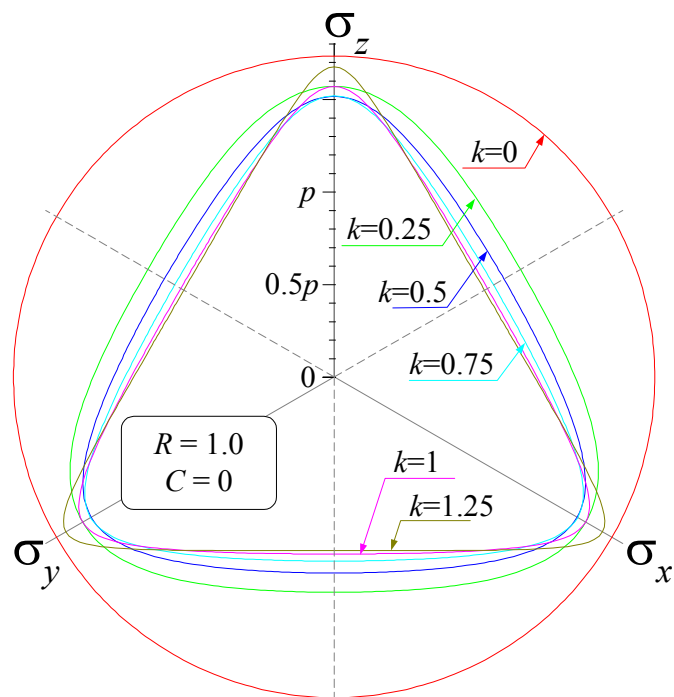


図2 π 平面上の応力基準面の形状
($R = 1.0, C = 0$ の場合)

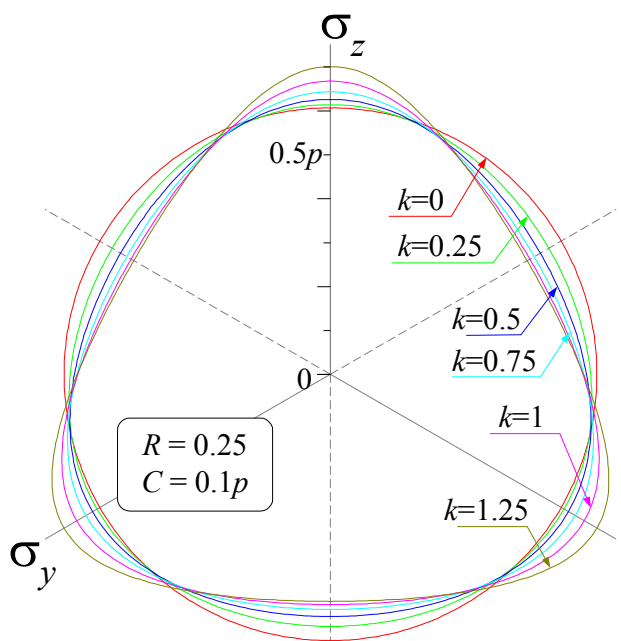


図3 π 平面上の応力基準面の形状
($R = 0.25, C = 0.1p$ の場合)

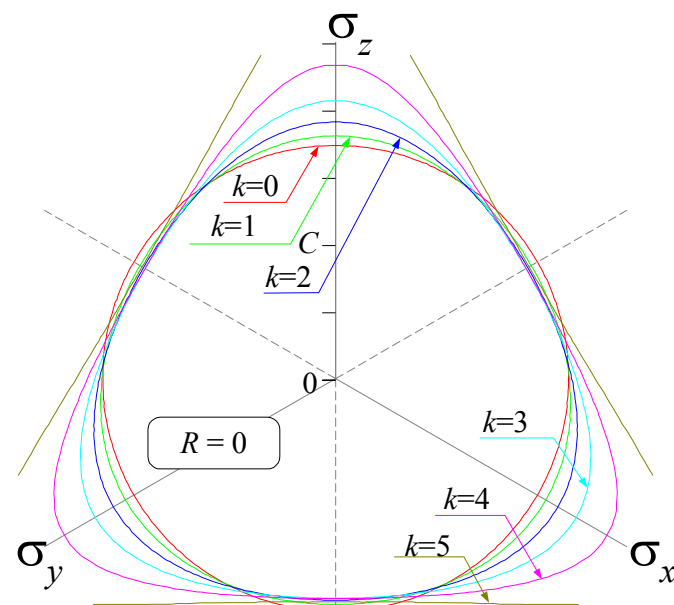


図4 π 平面上の応力基準面の形状
($R = 0$ の場合)

ン基準[1]は $C = 0$ に対して松岡・中井の基準となる．いろいろな k の値に対するクーロン基準[1]の特性をわかりやすく表示するために， π 平面上($3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$)での応力基準面の形状を図1～4にプロットした．いずれの場合においても， $k = 0$ のときには応力基準面は π 平面上で真円となるが， k の増加に伴って π 平面上の応力基準面のひしやげ具合が大きくなり，三角形に近い形状となる．なお，もし $k < 0$ とすれば π 平面上の応力基準面は三軸圧縮方向($\sigma_2 = \sigma_3$)に比べて三軸伸張方向($\sigma_1 = \sigma_2$)に突出した逆三角形に近い形状となる．

参考文献 吉嶺充俊，クーロンの破壊基準を適用する面の方向について，第39回地盤工学研究発表会，2004.