

一様緩勾配斜面における内部波の変形に関する数値計算

中央大学理工学部

正会員 ○山田 正

中央大学大学院

学生員

山田 拓也

(独)北海道開発土木研究所

正会員 安田 浩保

中央大学理工学部

正会員

岡田 将治

1. 研究目的

密度成層した湖沼や海洋では,様々な要因により密度界面に内部波が発生し,伝播に伴い下層からの栄養塩の巻上げや底泥移動などに影響を及ぼすと考えられる.本研究では一様緩勾配斜面上の2層流体界面を伝播する内部波に関して,下層厚の変化に伴い安定波形が負から正の波高の内部波へと変化するCritical Levelにおける波形変化など,内部波の基礎的な挙動に関して一次元数値計算を用いて解析を行う.

2. 内部波を記述する基礎方程式の導出

2層流密度境界面を伝播する内部波の基礎方程式を導出する.界面上の内部波の伝播方向に X 軸,鉛直上向きに Z 軸にとる.また速度ポテンシャル ϕ_i ,密度 ρ_i [kg/m³],層厚 h_i [m],密度界面に生じる長波の伝播速度 C_0 [m/s],伝播速度 U [m/s],内部波の振幅 α [m],内部波の波高 ζ [m],重力加速度 g [m/s²],波高水深比 ε とし,下付き文字 i は下層($i=1$)及び上層($i=2$)を表す.

$$\phi_{ixx} + \phi_{izz} = 0 \dots (1) \quad c_0 = \frac{\sqrt{gh_1h_2(\rho_1 - \rho_2)}}{\sqrt{\rho_2h_1 + \rho_1h_2}} \dots (2) \quad \xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - c_0t) \dots (3) \quad \tau = \varepsilon^{\frac{3}{2}}t \dots (4) \quad \varepsilon\phi_{i\xi\xi} + \phi_{izz} = 0 \dots (5)$$

$$\zeta = \varepsilon(\zeta^{(0)} + \varepsilon\zeta^{(1)} + \varepsilon^2\zeta^{(2)} + \dots) \dots (6) \quad \phi_i = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\phi_i^{(0)} + \varepsilon\phi_i^{(1)} + \varepsilon^2\phi_i^{(2)} + \dots) \dots (7) \quad \phi_{izz}^{(1)} = -\phi_{i\xi\xi}^{(0)} \dots (8)$$

$$\phi_{1z}^{(1)} \Big|_{z=-h_1} = 0 \dots (9) \quad \phi_1^{(1)} \Big|_{z=-h_1} = 0 \dots (10) \quad \phi_2^{(1)} \Big|_{z=h_2} = 0 \dots (11) \quad \phi_{2z}^{(1)} \Big|_{z=h_2} = 0 \dots (12)$$

$$\phi_{iz} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(-\zeta_\xi + \varepsilon\zeta_\tau) + \varepsilon\zeta_\xi\phi_{i\xi} \dots (13)$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}(-c_0\phi_{1\xi} + \varepsilon\phi_{1\tau}) + \frac{1}{2}\{\varepsilon(\phi_{1\xi})^2 + (\phi_{1z})^2\} + g\zeta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(-c_0\phi_{2\xi} + \varepsilon\phi_{2\tau}) + \frac{1}{2}\{\varepsilon(\phi_{2\xi})^2 + (\phi_{2z})^2\} + g\zeta \dots (14)$$

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + a\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right] = 0 \dots (15) \quad a = \frac{3c_0(\rho_1h_2^2 - \rho_2h_1^2)}{2h_1h_2(\rho_1h_2 + \rho_2h_1)} \dots (16) \quad b = \frac{c_0h_1h_2(\rho_1h_1 + \rho_2h_2)}{6(\rho_1h_2 + \rho_2h_1)} \dots (17)$$

上下層にラプラス方程式(1)を立て,式(3)(4)を用いて界面を伝播する内部長波の伝播速度 C_0 で移動する座標系に変換し式(5)を得る.内部波の波高及び上下層の速度ポテンシャルを摂動展開した式(6)(7)を上下層のラプラス方程式(5)に代入し $\varepsilon^{3/2}$ 以上を微小項として無視し式(8)を得る.式(8)に水面及び水底での境界条件(9)(10)(11)(12)を適用する.水面及び水底形状の空間変化は十分に緩やかと仮定し,固定壁で固められている状態を考える.また密度界面での境界条件として運動学的条件(13)及び界面に於けるベルヌーイの定理(14)を適用する.最後に式(5)で静止座標系に変換し密度界面を伝播する内部波の基礎方程式(15)を得る.

3. 数値解析手法

数値計算手法として,空間微分項に関して5点中央差分法,時間微分項に関してはRunge-Kutta-Gill法を用いており,時間的にも空間的にも4次精度の解析を行っている.また初期条件としては密度界面に初期波形を与えている.境界条件としては境界及び境界に隣接する格子点において界面位置を固定して与えている.

4. 基礎方程式の孤立波解に関する考察

基礎方程式の孤立波解を以下に示す.孤立波解の導出に関しては様々な文献に記載されており省略する.

$$\zeta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha a}{12b}}(x - Ut) \right\} \dots (18) \quad U = c_0 + \frac{1}{3}\alpha a \dots (19)$$

表-1 振幅と移流項係数による伝播速度の変化

	非線形移流項 の係数 $a > 0$	非線形移流項 の係数 $a < 0$
振幅 $\alpha > 0$	$U > C_0$	$U < C_0$
振幅 $\alpha < 0$	$U < C_0$	$U > C_0$

式(18)の位相の係数に注目すると $\alpha a/b \geq 0$ でなければならない.式(17)より b の値は常に $b > 0$ より孤立波の波形は a 及び α の符号の正負により変化する. $a > 0$ のとき振幅 α が正の孤立波が安定波形であり, $a < 0$ では振幅 α が負の孤立波が安定波形となる.従って $a = 0$ ($h_2/h_1 = \sqrt{\rho_2/\rho_1}$)を境として振幅が正及び負の内部波の孤立波解が存在する事が解る.次に内部波の位相速度 U について式(19)より,振幅 α と係数 a の符号により位相速度 U は線形長波の伝播速度 c_0 からずれることが解る.表-1より a が正の場合,振幅 α が正の波の位相速度は線形長波の伝播速度 c_0 より速くなり,振幅 α が負の波の位相速度は c_0 よりも遅くなる事が解る.また a が負の場合

キーワード 内部波 ソリトン分裂 一様緩勾配斜面 2層流体

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL03-3817-1805 E-mail:y-takuya@civil.chuo-u.ac.jp

振幅 α が正の波の位相速度は線形長波の伝播速度 c_0 より遅くなり、負の波の位相速度は c_0 よりも速くなる。

5. 数値実験結果

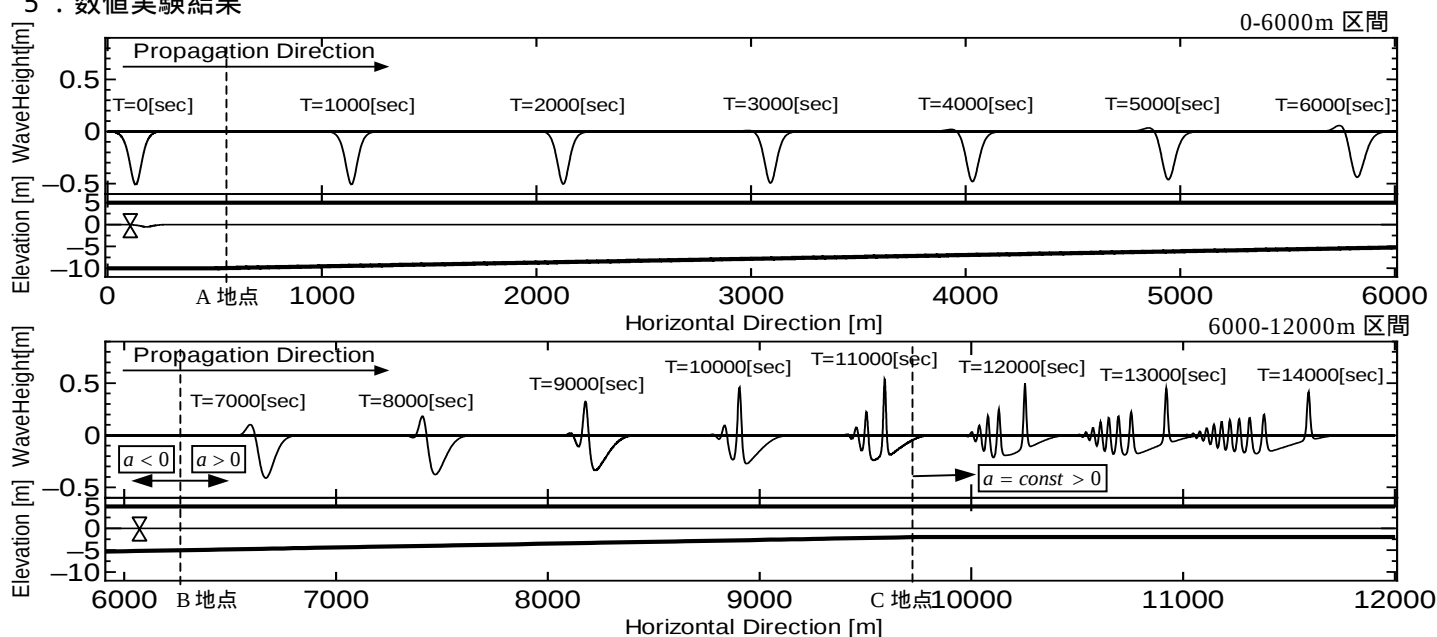


図 - 1 一様緩勾配斜面における内部波ソリトンの波形変化
 [上層の密度 1000[kg/m³], 下層の密度 1030[kg/m³], 上層厚 5m, 0-500mは下層厚 10mの平坦床,
 500m-9740mは河床勾配 1/1154の一様勾配斜面, 9740m-12000mは下層厚 2mの平坦床]

上層が固定壁で固定されており、下層厚が緩やか浅くなる一様緩勾配斜面上の界面を伝播するソリトンの波形変化を図 - 1 に示す。初期波形として波高 0.5m、波長 260mの負の振幅を持つソリトン波形を与えた。図 - 1 の 0-500mの平坦床区間では、ソリトンは波形変化せずに安定に伝播している。500-9740mの一様緩勾配斜面区間では、内部波の伝播に伴い内部波の進行方向に対して背面の勾配が次第に急峻になり、経過時間 3000 秒以降では負の内部波の背面に波高が正の内部波が発生している事が解る。また内部波が B 地点を通過すると、背面の勾配の急峻化が急激に進み、正の波高を持つ後続波の波高が大きくなり波長が短くなっていることが解る。基礎方程式の孤立波解を見ると、地点 B を境として基礎方程式中の非線形移流項の係数である式(16)の符号が変化する。内部波が地点 B を通過すると式(16)が正の値をとり、このとき振幅が正の内部波は界面を伝播する線形長波の伝播速度より速くなり、振幅が負の内部波は線形長波の伝播速度より遅くなる。従って地点 B を通過した内部波の振幅が正の位相は振幅が負の位相に比べて伝播速度が速いために内部波背面の勾配が急峻化し、経過時間 7000 秒時の波形のような段波面を形成すると考えられる。内部波の背面において形成された段波面は前傾化が進むと分散し、分散後の第一波の波高が増大すると共に進行方向後面に複数の波を作り、波状段波を形成する。また振幅が正の波が発生するに伴い振幅が負の波は減衰している事が解る。これにより正の振幅の波が安定となる B 地点以降では、振幅が負の内部波は分散により正の内部波を発生させる事で安定波形へと遷移すると考えられる。一様勾配斜面通過後の平坦床区間においては、伝播に伴い次第に波高が減衰しており、また分散により複数の内部波が生じている。

6. まとめ

本研究では一様緩勾配斜面上の 2 成層界面を伝播する内部波の波形変化について解析を行った。一様勾配斜面上の界面を伝播する振幅が負の内部波では、下層厚の浅化に伴い波の進行方向後面に振幅が正の内部波が発生することが解った。内部波の安定波形の振幅が負から正へと変化する断面を通過すると、波高が正の位相の伝播速度が負の位相よりも速くなるために内部波ソリトンの背面が急峻な段波面を形成し、波高の増大及び前傾化に伴い分散することが解った。

参考文献 1)Kerl R.Helfrich, W.K.MELVILLE (1984): On interfacial solitary waves over slowly varying topography, J.Fluid.Mech,Vol.149, pp.305-317. 2)船越満明, 及川正行 (1989): 成層流体中の非線形波動, ながれ 8, pp.311-335. 3)山田正, 桑嶋知哉(1992): 内部波の緩勾配方程式と浅水変形に関する研究, 土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集,Vol.19,pp.98-99. 4)山田正, 高橋克人, 桑嶋知哉(1993): 内部波の緩勾配方程式に関する研究, 土木学会関東支部技術研究発表会講演概要,Vol.20,pp.78-79. 5)向山公人, 山田正, 内島邦秀, 大島伸介(1995): 内部波における緩勾配方程式と浅水変形に関する研究, 土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集 Vol.22,pp100-101.