

安定化有限要素法に基づく CIVA/Level set 法による越波現象の数値解析

中央大学大学院 学生員 ○弘崎聡
日本工営 正会員 桜庭雅明
中央大学 正会員 樫山和男

1. はじめに

現在, 実用に用いられている数値シミュレーションは鉛直方向を静水圧近似した平面二次元的な手法が主流である。しかし, これらの手法は碎波時の水塊の巻き込みや乱れを含めた複雑な流れを表現するのが困難とされてきた。このような波浪変形の問題に対する数値解析手法として, 鉛直方向の流れ場も計算し, 自由表面位置を界面関数により定義する VOF 法¹⁾や Level set 法²⁾等が挙げられる。中でも, Level set 法は, 界面近傍での鋭敏性を常に保つことができ, 近年, 注目されている手法である。

本論文は, 複雑な解析領域に対しても計算可能とするために, 非構造格子を用い, 流れ場の計算には安定化有限要素法³⁾, 自由表面位置を決定するための移流方程式の解法には高精度上流化手法である CIVA 法⁴⁾を用いた CIVA/Level set 法⁵⁾による数値解析手法を提案するものである。数値解析例として, 構造物に対する越波現象の問題を取り上げ, 既往の計算手法および水理模型実験との比較を行い, 本手法の有効性を検討した。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と境界条件

本手法の流れ場の計算における基礎方程式は, 非圧縮性粘性流体における Navier-Stokes の運動方程式と連続式に対して, Smagorinsky モデルに基づく LES によりモデル化された式である。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f} - \nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\sigma = -\frac{1}{\rho} p \mathbf{I} + 2(\nu + \nu_{SGS}) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \quad (3)$$

$$\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T) \quad (4)$$

ここに, Ω は解析領域, $\bar{\mathbf{u}}$ は流速, p は圧力, $\mathbf{f}$ は物体力, ρ は密度, ν は動粘性係数, σ は応力テンソル, $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ は速度ひずみテンソル GS 成分である。また, ν_{SGS} は渦動粘性係数であり, 以下のように表す。

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})} \quad (5)$$

ここに, C_s は Smagorinsky 定数である。また, Δ は格子フィルター幅であり, 要素面積の平方根とした。また, Dirichlet 型, Neumann 型境界条件は以下のように与えられる。

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \bar{\mathbf{h}} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (7)$$

Key Word: 安定化有限要素法, CIVA 法, Level set 法, 非構造格子, 越波

〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学
TEL 03-3817-1815, E-mail sts-hiro@kc.chuo-u.ac.jp

ここに, $\bar{\mathbf{g}}$, $\bar{\mathbf{h}}$ はそれぞれ流速, トラクシヨンの既知量の GS 成分を表し, Γ_g , Γ_h はそれぞれ流速, トラクシヨンの既知の境界, $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

また, 本研究では気液界面の位置を表現する方法として, 界面位置とその周辺距離の関係を表す関数 (Level set 関数) を用いている。Level set 関数は次式に示すような移流方程式で支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (8)$$

ここに, ϕ は Level set 関数である。

流れ場の計算における基礎方程式 (1), (2) に対して, 空間方向の離散化には, 複雑な地形における解析を可能とするために, 安定化手法として任意形状の適合性に優れかつ高精度な流速・圧力同次補間要素を用いた SUPG/PSPG (Streamline Upwind-Petrov Galerkin/Pressure Stabilizing-Petrov Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法³⁾を用いた。時間方向の離散化には, 2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を適用した。また, 連立 1 次方程式の解法には Element-by-Element 法に基づく GMRES 法を用いた。

(2) Level Set 法の概要

Level set 法²⁾は, 界面位置と液相と気相の関係を Level set 関数として表すことにより界面上の不連続点を平滑に捉えることを可能とする方法である。任意の時間における Level set 関数 ϕ から, 次式に示す Heaviside 関数を用いることにより界面近傍の平滑化を行う。

$$H_\alpha = 0.5 \times \max \left[-1.0, \min \left\{ 1.0, \frac{\phi}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi \phi}{\alpha} \right) \right\} \right] \quad (9)$$

ここに, H_α は Heaviside 関数, α は界面から平滑化を行う幅であり, 最小メッシュ幅の 1~5 倍程度の値を用いる。なお, Heaviside 関数を用いることにより, 気液相の密度と粘性係数は次式のように表すことができる。

$$\rho = 0.5 (\rho_{Liq} + \rho_{Gas}) + (\rho_{Liq} - \rho_{Gas}) H_\alpha \quad (10)$$

$$\mu = 0.5 (\mu_{Liq} + \mu_{Gas}) + (\mu_{Liq} - \mu_{Gas}) H_\alpha \quad (11)$$

ここに, 添字 *Liq* は液相, *Gas* は気相を表す。

(3) CIVA 法による移流方程式の計算

式 (8) の計算法としては, 移流方程式の解の精度が高く保障される CIVA (Cubic Interpolation Volume/Area Coordinate) 法⁴⁾を用いた。CIVA 法は CIP (Cubic Interpolation Pseudo-particle) 法⁶⁾を三角形または四面体要素に対して適用が可能になるように, 面積座標または体積座標系を導入して拡張した方法である。具体的な CIVA 法による計算方法は, 移流方程式の局所厳密解である式 (12) を用いて, 各節点の時刻 t での Level set 関数値は, 上流側の $\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t$ 地点での値で近似し, 上流側の要素における完全 3 次多項式で補間する決定される。

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t, t - \Delta t) \quad (12)$$

なお、完全3次多項式は式(13)のように表現できる。

$$\phi(L) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + \sum_{j,k=1}^3 \beta_{jk} [L_j^2 L_k + b_{jk}^2(L)]$$

$$\alpha_i = \phi_i, \quad \beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla \phi_j \quad (13)$$

$$b_{jk}^2(L) = \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \quad (14)$$

ここに、 L は面積座標を表す。

3. 数値解析例

本手法の有効性を示すために、海岸波動特有の現象である越波問題を取り上げた。図-1に示すように、長さ20mの数値波動水路の中に天端高 R を有する堤体が1/20勾配の斜面の上部に設置されているものとする。沖側での静水深は0.6mであるものとして天端高と沖波波高・周期の条件を変化させた場合の計算を行い、既往の実験結果⁷⁾と比較した。なお、計算ケースとして天端高 $R=9.4\text{cm}$ 、 12.8cm の条件に対して適用した。計算に用いた有限要素分割は、それぞれ水面近傍における最小メッシュ幅を2cmにした非構造格子を用いた。入射波浪の条件として、造波境界にストークス波の第5近似解に基づく流速と水位を与え、 $R=9.4\text{cm}$ の場合の波高を10,12,16cm、 $R=12.8\text{cm}$ の場合の波高を12,16cmと変化させ、周期は1.77秒の一定条件とした。Smagorinsky定数は一様等方性乱流の仮定に基づく $C_s=0.23$ を採用した。また、密度と粘性係数は、液体として水(密度 998.0kg/m^3 、粘性係数 $1.01 \times 10^{-3}\text{Ns/m}^2$)、気体として空気(密度 1.205kg/m^3 、粘性係数 $1.81 \times 10^{-5}\text{Ns/m}^2$)を与えた。

図-2に $R=12.8\text{cm}$ 、波高16cm、周期1.77秒の場合の堤体周辺の水面変化状況及び流速ベクトルの分布を示す。この結果から、構造物を越波する状況が捉えられていることが確認できる。また、図-3に既往の実験⁷⁾およびVOF法に基づく数値波動解析ソフト(CADMAS-SURF^{8),9)}との越波流量の比較を示す。なお、CADMAS-SURFでの計算で用いた格子分割は堤体近傍以外は $\Delta x = 4\text{cm}$ 、 $\Delta z = 1\text{cm}$ であり、堤体付近では天端高を正確に考慮するため、不等間隔格子にしている。この結果の比較より、本手法は波高条件が大きい場合において一部越波流量を過大評価する傾向が見られるものの、実験結果と良好な一致を示している。また、CADMAS-SURFの結果と比較して、波高条件が小さい場合においては、本手法がより実験値に近いことが確認できる。

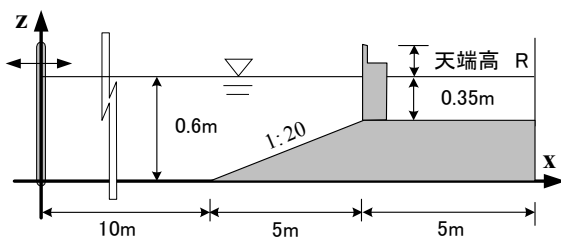


図-1 越波問題における数値波動水槽

4. おわりに

本論文では、複雑な地形に対しても解析が可能である安定化有限要素法に基づくCIVA/Level set法による数値解析手法を提案し、越波現象の生ずる問題への適用を行っ

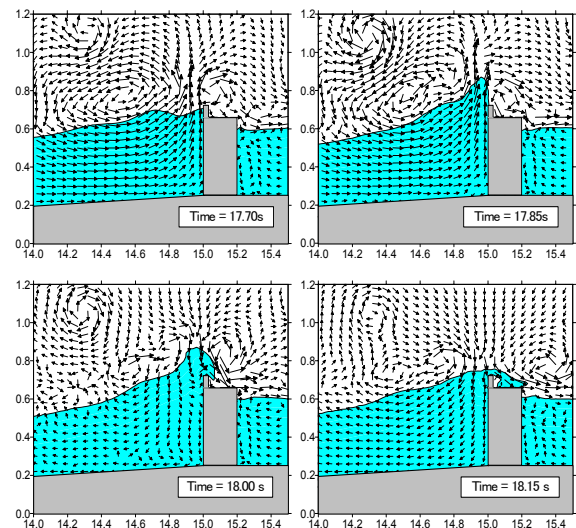


図-2 堤体付近における水面形状および流速ベクトル図の時刻歴

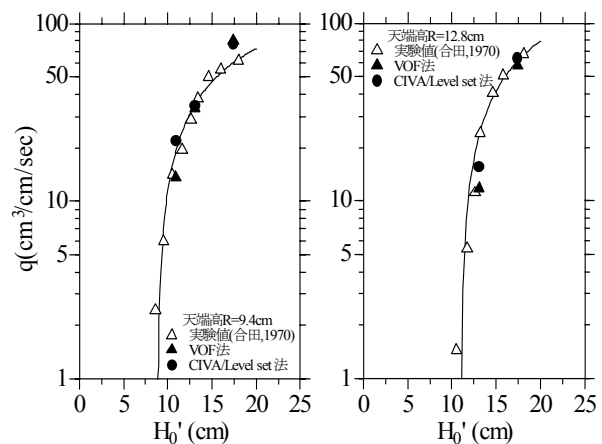


図-3 既往実験およびVOF法による数値波動水路との比較

た。その結果、本手法による解析結果は、越波量において実験値と良い一致を示し、本手法の有効性が示された。

今後は、不規則入射波による検討、実地形に対する問題への応用等が挙げられる。

参考文献

- 1) Hirt, C. W., Nichols, B. D. : Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.*, 39, pp.201-225, 1981.
- 2) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S. : A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow, *J. of Comput. Physics*, 144, pp.146-159, 1994
- 3) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 95, pp.221-242, 1992.
- 4) Tanaka, N.: The CIVA Method for Mesh-Free Approaches: Improvement of the CIP Method for n-Simplex, *Comput. Fluid Dynamics J.*, 8, No.1, pp.121-127, 1999.
- 5) 桜庭雅明, 樫山和男: Level set法を用いた安定化有限要素法による自由表面流れの数値解析, 海岸工学論文集, 第50巻, pp.16-20, 2003.
- 6) Yabe, T. and Aoki, T. : A universal solver for hyperbolic equation by cubic-polynomial interpolation, *Comput. Phys. Commun.*, 66, pp.219-242, 1991.
- 7) 合田良実: 防波護岸の越波流量に関する研究港湾技術研究所報告, 第9巻, 第4号, 1970.
- 8) 数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会: 海域施設の耐波設計に適用できる数値波動水路 (CADMAS-SURF) の研究・開発と将来展望, 土木学会論文集, No.705, /I1-59, pp.1-17, 2002
- 9) 佐貴宏, 藤田龍, 関本恒浩, 清水琢三: 数値モデルによる越波量の評価に関する研究, 海岸工学論文集, 第48巻, pp.736-740, 2001.