層内の密度変化を考慮した非線形内部波方程式

独立行政法人港湾空港技術研究所　正会員　柿沼太郎

1. 序　　論: 水域において，表面波ほど重力による復元力が働かない内部波は，波高が大きくなりやすい (焦, 1995)．沿岸域に生成・伝播した大きなエネルギーを有する内部波は，水質環境や漁場形成のみならず底質移動にも影響を与えるであろう．こうした内部波の波動としての物理的性質を正確に把握するためには，非線形波動理論に基づく数値解析によって波動の非線形性・分散性を詳細に議論する必要がある．また，水塊は，等密度面に沿って移動する傾向があり，鉛直方向に対象領域を層に区切った layer モデルを適用することは，数値解析精度を向上させるという意味を有する．ところで，各層内の密度が空間的，または，時間的に変化する場合，流体運動の解析のためには，密度変化を考慮した内部波の波動方程式が必要になる．そこで，本研究では，変分法を用いて，密度が変化する非回転運動を対象とした非線形内部波方程式の導出を試みる．

2. 密度成層: 右図のように，非粘性流体が成層状態にあるとする．流体の種類を上から順に $i = 1, 2, \cdots, I$ で表わし，各層内の流体の密度を $\rho_i(\boldsymbol{x}, z, t)$ とする．第 i 層の流体の下面及び上面の位置をそれぞれ $z = \eta_{i,0}(\boldsymbol{x}, t)$ 及び $z = \eta_{i,1}(\boldsymbol{x}, t)$ とし，各面における圧力をそれぞれ $p_{i,0}(\boldsymbol{x}, t)$ 及び $p_{i,1}(\boldsymbol{x}, t)$ と定義する．表面波と内部波の両者について砕波を考慮せず，渦や乱れの効果を無視し，$\eta_{i,j}$ が $\boldsymbol{x}$ の 1 価関数であるとする．また，各流体層間の界面を通しての混合・拡散は，別途考慮することとして変分問題において無視し，流体の密度が $\rho_i(\boldsymbol{x}, \eta_{i,0}, t) \leq \rho_{i+1}(\boldsymbol{x}, \eta_{i,0}, t)$ であるとする．

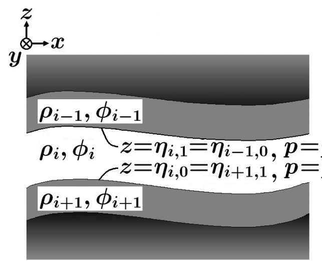

図　密度成層

3. 変分問題における汎関数の定義: 流体運動が非回転であると仮定し，第 i 層の各点における速度ポテンシャル $\phi_i(\boldsymbol{x}, z, t)$ を $\boldsymbol{u}_i = \nabla\phi_i$, $w_i = \partial\phi_i/\partial z$ によって定義する．ここで，$\boldsymbol{u}_i$ 及び w_i は，それぞれ，各点における流速の水平方向成分ベクトル及び鉛直方向成分である．$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は，水平方向の微分演算子である．

いま，第 i 層が有する二つの界面のうちの何れか一方の位置 $z = \eta_{i,1-j}$ ($j = 0$ or 1) と，他方の界面における圧力 $p_{i,j}$ とがともに既知であるとする．すると，求める未知変数は，速度ポテンシャル ϕ_i，界面位置 $\eta_{i,j}$，密度 ρ_i，圧力 $p_i(\boldsymbol{x}, z, t)$ ($\eta_{i,0} < z < \eta_{i,1}$)，etc. となる．このとき，第 i 層における流体運動に対する変分問題の作用 $\mathcal{F}_i[\phi_i, \eta_{i,j}, \rho_i, p_i]$ を柿沼 (2000, 2002) を参考にして次式の汎関数とする．

$$\mathcal{F}_i[\phi_i, \eta_{i,j}, \rho_i, p_i] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left\{ \rho_i \left[\frac{\partial\phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi_i)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\right)^2 + gz \right] + p_{i,j} + \varPi_i \right\} dz\, dA\, dt \tag{1}$$

ここで，$(\nabla\phi_i)^2 \equiv |\nabla\phi_i|^2$ とする．すべての層について，対象領域の $x - y$ 平面への正射影が，時間に関して変化しない同一平面 A であるとする．また，g は，重力加速度である．質量力が重力のみであると仮定し，表面張力による復元効果を重力の効果に比べて無視する．$\varPi_i(\boldsymbol{x}, z, t)$ は，エンタルピーの ρ_i に関する積分である．第 i 層の $\varPi_i$ は，層間の熱力学的干渉による第 k 層からの寄与分 $\varPi_{i,k}(\boldsymbol{x}, z, t)$ ($k = i-1, i+1$) を含む．

4. 鉛直分布関数の設定: ϕ_i 及び ρ_i をそれぞれ z のべき関数 z^α の重み付きの和として次式のように表わす．

$$\phi_i(\boldsymbol{x}, z, t) \equiv \sum_{\alpha=0}^{N-1}\{z^\alpha \cdot f_{i,\alpha}(\boldsymbol{x}, t)\} = f_{i,\alpha} \cdot z^\alpha, \quad \rho_i(\boldsymbol{x}, z, t) \equiv \sum_{\alpha=0}^{N-1}\{z^\alpha \cdot \ell_{i,\alpha}(\boldsymbol{x}, t)\} = \ell_{i,\alpha} \cdot z^\alpha \tag{2}$$

5. 変分原理の Euler-Lagrange 方程式の導出: 式 (2) を式 (1) に代入して鉛直積分を行なった後，$f_{i,\alpha}$, $\ell_{i,\alpha}$ 及び $\eta_{i,j}$ に関する変分原理の Euler-Lagrange 方程式を求めると，表面波及び内部波の非線形方程式系が式 (3)∼ (5) のように得られる ($\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$)．

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q_i[\alpha+\beta]\ell_{i,\beta}) + \nabla(Q_i[\alpha+\beta+\gamma]\nabla f_{i,\beta} \cdot \ell_{i,\gamma}) - R_i[\alpha,\beta,\gamma] f_{i,\beta}\ell_{i,\gamma} + \left[\int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \varPi_i\, dz\right]_{\phi_i} = 0 \tag{3}$$

キーワード → 内部波，　密度成層，　圧縮性，　非線形性
連　絡　先 → 〒 239–0826 横須賀市長瀬 3–1–1，　Phone: 046(844)5052，　Facsimile: 046(844)1274

$$Q_i[\alpha+\beta]\frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t}+\frac{1}{2}Q_i[\alpha+\beta+\gamma]\nabla f_{i,\beta}\nabla f_{i,\gamma}+\frac{1}{2}R_i[\beta,\gamma,\alpha]f_{i,\beta}f_{i,\gamma}+gQ_i[\alpha+1]+\left[\int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}}\Pi_i\ dz\right]_{\ell_{i,\alpha}}=0 \quad (4)$$

$$\eta_{i,j}^{\beta+\gamma}\frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t}\ell_{i,\gamma}+\frac{1}{2}\eta_{i,j}^{\beta+\gamma+\delta}\nabla f_{i,\beta}\nabla f_{i,\gamma}\cdot\ell_{i,\delta}+\frac{1}{2}S_{i,j}[\beta,\gamma,\delta]f_{i,\beta}f_{i,\gamma}\ell_{i,\delta}+g{\eta_{i,j}}^{\beta+1}\ell_{i,\beta}+p_{i,j}+\Pi_i\Big|_{z=\eta_{i,j}}=0 \quad (5)$$

ここで，$Q_i[\alpha]$，$R_i[\alpha,\beta,\gamma]$ 及び $S_{i,j}[\alpha,\beta,\gamma]$ は，それぞれ，次式のような $\eta_{i,e}$ $(e=0 \text{ or } 1)$ の関数である．

$$Q_i[\alpha]=\frac{1}{\alpha+1}(\eta_{i,1}^{\alpha+1}-\eta_{i,0}^{\alpha+1}),\quad R_i[\alpha,\beta,\gamma]=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma-1}(\eta_{i,1}^{\alpha+\beta+\gamma-1}-\eta_{i,0}^{\alpha+\beta+\gamma-1}) & (\alpha\beta\neq 0)\\ 0\quad(\alpha\beta=0)\end{cases},$$

$$S_{i,j}[\alpha,\beta,\gamma]=\begin{cases}\alpha\beta\ \eta_{i,j}^{\alpha+\beta+\gamma-2} & (\alpha\beta\neq 0)\\ 0\quad(\alpha\beta=0)\end{cases} \quad (6)$$

本方程式系は，鉛直分布関数の項数を十分に多くとることにより，密度成層の層厚や波の周波数帯域からの制約を受けることなく，強非線形性・強分散性を有する表面波や内部波の解析を理論的に可能とする．

密度は，圧力，濃度，温度等の関数であり，ここで示した方程式以外にも，Π_i の関数形や，これらの未知変数を結び付ける他の方程式系が必要である．例えば，理想気体や，体積弾性率が一定の単相の液体では，圧力が密度の関数として表わされ（$p_i=p_i(\rho_i)$），このとき，未知変数は，$\phi_i,\eta_{i,j}$ 及び ρ_i のみとなる．

連続方程式である式 (3) は，圧縮性流体の質量保存則である.「圧縮性」とは，密度が変化し得るという意味であり，流体の単位質量当たりの体積が伸縮することである．塩分といった溶質の投与，日照による蒸発，化学反応や微生物の関与は，対象としている流体運動の系内の質量を変化させるが，これらは，未知変数に関する方程式や境界条件を介して，圧縮性流体の密度変化として連続方程式と運動方程式の両者に影響する．

体積弾性率 $K_i\equiv\rho_i dp_i/d\rho_i$ は，圧力による流体粒子の体積の伸縮という意味の圧縮性を示すが,「圧縮性」流体の密度変化は，圧力変化を伴わない場合もある．この場合，密度は，圧力と独立した成分を有する．そして，熱力学的，化学的，または，生物学的原因による密度変化も，運動方程式において力学的影響として現れる．流体粒子の体積が伸縮せず，密度が既知である場合，流体を非圧縮性流体として扱うことが可能になる．

6．長波近似: 流体の各層が極浅水域にある場合を対象とし，鉛直分布関数を 1 項のみ用いることにして $(N=1)$，$\phi_i(\boldsymbol{x},z,t)=f_{i,\alpha}\cdot z^\alpha=f_{i,0}=\phi_i(\boldsymbol{x},t)$ 及び $\rho_i(\boldsymbol{x},z,t)=\rho_i(\boldsymbol{x},t)$ とする．そして，流体粒子の体積が伸縮せず，圧力分布の静水圧近似が成り立つとすると，式 (3) ～ (5) は，次式のような各層内の水平方向の密度分布を考慮した内部長波の方程式系となる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_i(\eta_{i,1}-\eta_{i,0})\}+\nabla\{\rho_i(\eta_{i,1}-\eta_{i,0})\nabla\phi_i\}=0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi_i)^2+g\eta_{i,j}+p_{i,j}/\rho_i+\Gamma_i=0 \quad (8)$$

$$p_{i,0}-p_{i,1}=\rho_i g(\eta_{i,1}-\eta_{i,0}) \quad (9)$$

自由水面に大気圧が働く場合，その圧力を全領域で 0 とすると，Bernoulli の式から密度分布の効果が消去されてしまう．従って，ある定数値 Γ_i を付加しておく必要がある．ポテンシャルの基準値は，各層に対してどのような値にとってもよく，また，その基準値が場に一様な状態で時間的に変化してもよい．これは，ポテンシャルの差分が物理現象として現れるからである．

7．結　　論: 各層内の空間的・時間的な密度変化を考慮した非線形内部波方程式を導出した．これは，ポテンシャル場の力学的な運動を対象とした変分問題により導いた方程式系であり，粘性，摩擦及び拡散の影響や，密度に関係するその他の要因は，この変分問題の外部から与える必要がある．今後，本方程式系を用いて，密度成層領域を透過する表面波の特性を調べ，表面波・内部波間のエネルギー輸送や運動の非線形性に起因する長周期波成分を含む波動場の解析を行ないたい．

参考文献: 柿沼太郎 (2000): 非線形緩勾配方程式の内部波への拡張, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp. 1–5.;
柿沼太郎 (2002): 流体の密度を考慮した非線形波動方程式, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 1–5.;
焦 春萌 (1995): 40 メートルもの高さをもった水中の大波 —琵琶湖の非線形内部サージ—, オウミア, 滋賀県琵琶湖研究所, No. 54 (電子版).