

波状跳水の水面形状に関する一解析

日本大学理工学部 正会員 ○後藤 浩
日本大学理工学部 正会員 安田 陽一
日本大学理工学部 正会員 大津 岩夫

従来、波状跳水の水面形について理論的解析^{1)~4)}が試みられている。例えば、Iwasa¹⁾は鉛直加速度を考慮した開水路の基礎式から孤立波・クノイド波解を誘導し、それらを一波目山頂部に連結することによって波状跳水の水面形を表せるものとした。また、Andersen²⁾は Boussinesq のエネルギー方程式から波状跳水の水面形状を解析することを試みた。しかしながら、従来の研究者らによって提案された水面形状・波高・波長を示す理論解は、水平水路の場合、流入射流のフルード数 F_1 の値が 1.2~1.3 よりも大きい範囲では実験値を満足しない⁵⁾ [$F_1 = v_1 / (gh_1)^{1/2}$; v_1 : 流入射流の断面平均流速, h_1 : 流入射流水深, g : 重力加速度]。

最近、Grillhofer and Schneider⁶⁾は水路勾配が限界勾配よりも大きい場合(急勾配水路)を対象に摂動法を用いて基礎方程式から 3 階常微分方程式を導き波状跳水の水面形状を解析的に示した。

ここでは、急勾配水路で形成される波状跳水の水面形の実験的に示し、Grillhofer and Schneider による水面形解析手法による理論解との比較を行い、水面形状の解析手法の適用性について考察を行った。
Grillhofer and Schneider による水面形解析手法 図-1 に示す水路勾配 Θ を有する急勾配二次元開水路において形成される波状跳水(Nonbreaking undular jump⁷⁾)を対象とする。また、流入射流は乱流境界層が十分発達した等流とする。波状跳水の水面形を解析するための基礎式としてレイノルズ方程式 (1)、連続の式 (2)、境界条件として水面における運動学的および力学的境界条件 (3)、(4)、(6) 式、底面における運動学的境界条件 (5) 式を用いる。ここに、 x は水路床に沿った流下方向の長さ、 y は水路床に直な方向の長さ、 u, v は x, y 方向の流速成分、 $u_{\tau 1}$ は流入射流における摩擦速度、 u_{τ} は $x=x$ における摩擦速度、 u', v' は x, y 方向の変動流速成分、 h は $x=x$ における水深、 p は圧力、 δ は流下方向の長さ和水深方向の長さを補正するための係数、 κ はカルマン定数であり、各変数の $\bar{}$ は時間平均量を意味する。なお、(1) ~ (6) 式は全て (7) に示す量で無次元表示されている。

ε を摂動核として導入し、未知数全てを (8) 式のように摂動展開する。なお、 ε の 3 次オーダー以上の項については微小項として無視する。

次に、 F_1 、 Θ および δ を ε と関連付けて (9) 式のように表すものとする。ここに、 K 、 A 、 γ は定数である。なお、 K と γ について Grillhofer and Schneider は式変形の簡便性から $K=1.5$ 、 $\gamma=3$ としている。また、 A については具体的な数値を定めていない。

初期条件は流入射流が等流であることより (10) 式のように与える。

(1) ~ (6) 式に (8) ~ (10) 式を代入し整理すると ε の一次オーダーの式から (11) 式が得られる。さらに、 ε の 2 次オーダーの式を (10)、(11) 式を用いて整理すると 3 階の常微分方程式 (12) 式が得られる。

実験 実験には水路幅 $B=80(\text{cm})$ 、水路長 $L=18(\text{m})$ の可変勾配式滑面長方形断面水路を用いた。実験では水路勾配を急勾配 ($\Theta=1/80 \sim$

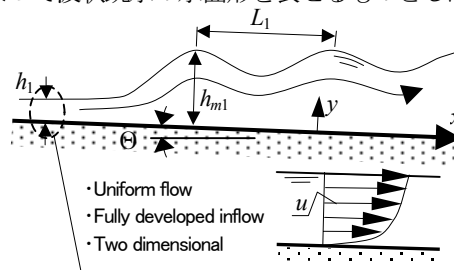


図-1 急勾配水路における波状跳水の形成

[レイノルズ方程式]

$$F_1^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \frac{\Theta}{\delta} - \frac{\Theta}{\delta} \left(\delta \frac{\partial \bar{U}'\bar{U}'}{\partial X} + \frac{\partial \bar{U}'\bar{V}'}{\partial Y} \right) \quad (1)$$

$$\delta^2 F_1^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - 1 - \Theta \left(\delta \frac{\partial \bar{U}'\bar{V}'}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}'\bar{V}'}{\partial Y} \right)$$

[連続の式]

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0 \quad (2)$$

[運動学的境界条件]

$$(\text{水面}) \quad \bar{V}(X, \bar{H}) = \bar{U}(X, \bar{H}) \frac{d\bar{H}}{dX} \quad (3)$$

$$\bar{U}(X, \bar{H}) = \frac{\sqrt{\Theta} U_{\tau}}{F_1} \left[\frac{1}{\kappa} \ln(Re_{\tau} U_{\tau} \bar{H}) + C(X) \right] \quad (4)$$

$$(\text{底面}) \quad \bar{V}(X, 0) = 0 \quad (5)$$

[力学的境界条件(水面)]

$$\left[\bar{P}(X, \bar{H}) + \Theta \bar{U}'\bar{U}'(X, \bar{H}) \right] \left(-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} \right) + \Theta \bar{U}'\bar{V}'(X, \bar{H}) = 0 \quad (6)^*$$

$$\left[\bar{P}(X, \bar{H}) + \Theta \bar{V}'\bar{V}'(X, \bar{H}) \right] + \Theta \bar{U}'\bar{V}'(X, \bar{H}) \left(-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} \right) = 0$$

※ (6) 式は水面での圧力および剪断力が 0 であることを意味している。

[無次元量]

$$X = \delta \frac{x}{h_1}, Y = \frac{y}{h_1}, \bar{H} = \frac{\bar{h}}{h_1}, \bar{U} = \frac{\bar{u}}{V_1}, \bar{V} = \frac{\bar{v}}{\delta V_1}, U_{\tau} = \frac{u_{\tau}}{u_{\tau 1}} \quad (7)$$

$$\bar{U}'\bar{U}' = \frac{\bar{u}'\bar{u}'}{u_{\tau 1}^2}, \bar{V}'\bar{V}' = \frac{\bar{v}'\bar{v}'}{u_{\tau 1}^2}, \bar{U}'\bar{V}' = \frac{\bar{u}'\bar{v}'}{u_{\tau 1}^2}, \bar{P} = \frac{\bar{p}}{\rho g h_1}, Re_{\tau} = \frac{u_{\tau 1} h_1}{\nu}$$

$$\bar{H}(X) = H_0 + \varepsilon H_1(X) + \varepsilon^2 H_2(X)$$

$$\bar{U}(X, Y) = U_0 + \varepsilon U_1(X, Y) + \varepsilon^2 U_2(X, Y) \quad (8)$$

$$\bar{V}(X, Y) = V_0 + \varepsilon V_1(X, Y) + \varepsilon^2 V_2(X, Y)$$

⋮

$$F_1 = 1 + K\varepsilon, \quad \Theta = A\varepsilon^2, \quad \delta = \gamma\sqrt{\varepsilon} \quad (9)$$

$$H_0 = 1, U_0 = 1, V_0 = 0, P_0 = 1 - Y, \bar{U}'\bar{V}' = Y - 1 \quad (10)$$

$$U_1 = -H_1 + \sqrt{A} \Delta U, V_1 = (dH_1/dX)Y, P_1 = H_1, \quad (11)$$

$$(\bar{U}'\bar{V}')_1(X, 1) = -H_1, (\bar{U}'\bar{V}')_1(X, 0) = 2H_1$$

$$\frac{d^3 H_1}{dX^3} - \left[6 \frac{K}{\gamma^2} - \frac{9}{\gamma^2} H_1 \right] \frac{dH_1}{dX} - \frac{9}{\gamma^2} \beta H_1 = 0 \quad \left(\beta = \frac{\Theta}{\gamma} \varepsilon^{-3/2} \right) \quad (12)$$

キーワード：波状跳水、跳水、開水路流、衝撃波、摂動法

連絡先：〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8; TEL. & FAX. 03-3259-0409; E-mail: gotoh@civil.cst.nihon-u.ac.jp

1/330) とし、跳水始端において乱流境界層が十分発達し、かつ等流となるように跳水始端位置を調整した。なお、波状跳水の流況特性がアスペクト比 B/h_1 の影響を受けない条件⁷⁾のもとで実験を行った。また、実験は波状跳水の形成に対して粘性の影響が無視できるレイノルズ数 Re の範囲($Re \geq 6.5 \times 10^4$)⁷⁾[Re :レイノルズ数($=v_1 h_1 / \nu$), ν :動粘性係数]で実施した。

解析結果と実験結果との比較および考察 図-2は一波目の波高および波長について(12)式を数値積分して得られた結果と実験によって得られた結果とを比較したものである[h_{m1} :一波目山頂部の水深, L_1 :一波目の波長(図-1 参照), $h_2=0.5h_1((8F_1^2+1)^{1/2}-1)$]。なお、(12)式を計算する上で K および γ については、 $K=1.5$, $\gamma=3$ を代入した。また、 Θ および

F_1 については、実験で与えた Θ とそれに対応して得られた F_1 を代入し計算した。また、図-2中にはIwasa¹⁾ および Andersen²⁾ の理論による計算結果を実線および破線で示す。図-2に示されるように、一波目の波高 h_{m1}/h_1 については、Iwasa および Andersen の理論による計算結果は F_1 が 1.2~1.3 以上の範囲で実験値より大きな値を示す傾向にあるが、Grillhofer and Schneider による計算結果は波状跳水が形成されている範囲で実験値とほぼ一致している。波長 L_1/h_2 については、Iwasa および Andersen の理論では F_1 が 1.2~1.3 よりも小さい範囲で計算値は実験値より大きな値を示し、 F_1 が 1.2~1.3 より大きくなると計算値は実験値よりも小さな値を示す。Grillhofer and Schneider による計算は F_1 が 1.2 よりも小さい範囲で計算値は実験値に近い値を示す。

流入射流のフルード数 F_1 の値が 1.2 よりも大きくなると波状跳水始端付近の両側壁から衝撃波が形成される⁷⁾(図-3 参照)。波状跳水の形成によって生じる逆圧力勾配によって跳水始端近くから水路側壁に沿った境界層の厚さが急激に増加し、跳水始端付近の水路側壁近くで水面の流速が限界流速より小さくなるため水路両側壁から衝撃波が形成されるものと考えられる。図-4は、衝撃波が形成されていない場合($F_1 < 1.2$)の水面形と衝撃波が形成されている場合($F_1 \geq 1.2$)の水面形を比較した一例である

(x :一波目山頂部から水路床に沿った流下方向の長さ, z :水路中央部から水路横断方向への水平長さ)。図-4(a)に示されるように衝撃波が形成されていない場合、水路横断方向に対する水深の変化は小さい。一方、図-4(b)に示されるように衝撃波が形成されている場合、衝撃波の影響により衝撃波下流側の水路側壁付近では水路中央で見られる波状水面は形成されない。このような衝撃波の形成の影響が Grillhofer and Schneider の計算の仮定に含まれていないため、 F_1 の値が 1.2 よりも大きくなると波長の計算結果と実験結果とに違いが生じてくるものと考えられる。

参考文献

- 1) Iwasa, Y., Undular jump and its limiting condition for existence, *Proc. of the 5th Japan National Congress for Applied Mech.*, pp.315~319, 1955.
- 2) Andersen, V. M., Undular hydraulic jump, *Journal of Hydraulic Division, Proc. of ASCE*, ASCE, 104(HY8), pp.1185~1188, 1978.
- 3) Hager, W. H. and Hutter, K., On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics, *Acta Mechanica*, 53, pp.183~200, 1984.
- 4) Sandover, J. A. and Taylor, C., Cnoidal waves and bores, *La Houille Blanche*, Juillet-Aout, 3, pp.443~456, 1962.
- 5) 後藤, 安田, 大津, 波状跳水の流況特性, 水工学論文集, 土木学会, 第45巻, pp.439~444, 2001.
- 6) Grillhofer, W. and Schneider, W., The undular hydraulic jump in turbulent open channel flow at large Reynolds numbers, *Physics of Fluids*, AIP, 15(3), pp.730~735, 2003.
- 7) Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Flow conditions of undular hydraulic jumps in horizontal rectangular channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 129(12), pp.948~955, 2003.

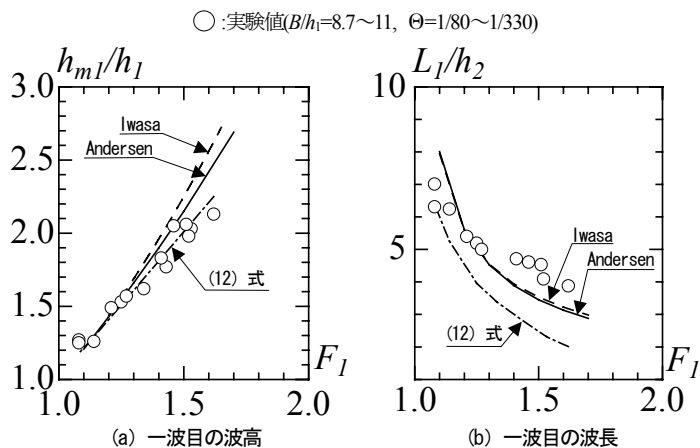


図-2 波高および波長

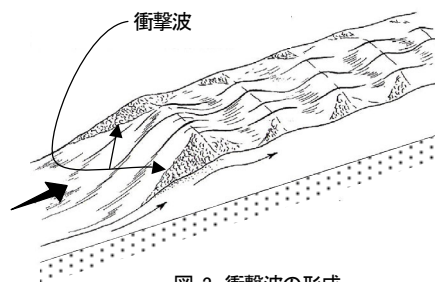
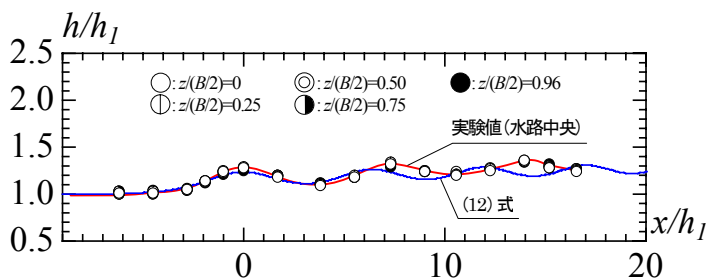
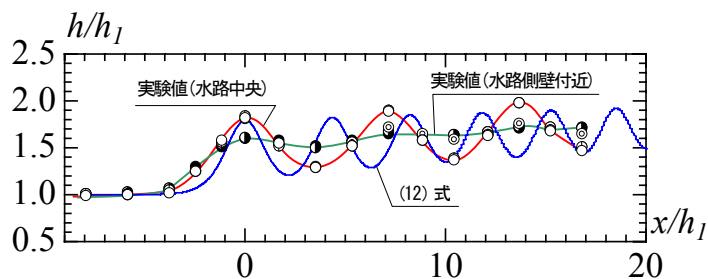


図-3 衝撃波の形成



(a) 衝撃波の形成が無い場合($F_1=1.11$, $B/h_1=9.0$, $\Theta=1/282$)



(b) 衝撃波の形成がある場合($F_1=1.39$, $B/h_1=10.4$, $\Theta=1/170$)

図-4 水路横断方向への水面形の変化