

3 次精度 6-point scheme の開発

山口大学工学部 正 朝位孝二
 山口大学大学院 学 ○坪郷浩一
 九州大学大学院 フェロー 小松利光

1. はじめに

流体の運動方程式や濃度などの移流拡散方程式を数値的に解く場合、移流項の計算スキームが数値解の精度を決定すると言っても過言ではない。古くから多くの移流項計算スキームが提案されている。最近の計算水理学の分野では、計算格子間にエルミート補間を施す CIP 法¹⁾ が良く用いられている。この方法は Holly and Preissmann がすでに提案しているスキームと同一である。Komatsu らは従属変数の微係数が変数として増えることを避けるために、6-point scheme³⁾ を開発した。このスキームは 1 次精度ながら高精度な移流計算結果を与えることができる。しかしながら誘導の段階で任意係数が含まれており、そのチューニングは数値実験的に定められている。本研究は任意係数を含まず、またスキームの時間・空間的な精度が高次精度の 6-point scheme の開発を行ったものである。

2. スキームの誘導

6-point scheme は特性曲線法に基づく計算方法である。一次元移流方程式の特性曲線の解法は格子点間に高精度な内挿曲線をどのように構築するかという問題に帰着する。図-1 のように $i-3 \sim i+2$ の格子点上の値 C を用いて、区間 $i-1 \sim i$ に内挿 3 次曲線を構築する。3 次曲線を構築するためには 4 点の値を用いれば十分であるが、ここでは 6 点あるため数種類の 3 次曲線が構築できる。そこで、まず以下の値を用いて 3 個の 3 次曲線を考える。

$$Cubic_1(x) = f_1(C_{i-3}, C_{i-2}, C_{i-1}, C_i, x) \quad (1)$$

$$Cubic_2(x) = f_2(C_{i-2}, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, x) \quad (2)$$

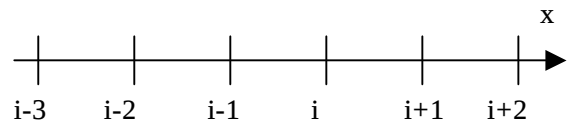


図-1 計算格子点

$$Cubic_3(x) = f_3(C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, C_{i+2}, x) \quad (3)$$

式 (2) は QUICKEST scheme になる。

Komatsu らの 6-point scheme の誘導では $i-1$ 点、 i 点の値と $i-1$ 点、 $i-1/2$ 点の勾配を用いて 1 つの 3 次曲線を構築する。さらに $i-1$ 点、 i 点の値と i 点、 $i-1/2$ 点の勾配を用いて 3 次曲線を構築する。両 3 次曲線の平均が 6-point scheme である。この誘導の仕方をここでも採用する。

$i-1$ 点の勾配は式 (1) および式 (2) を 1 階微分し、両者の平均で評価する。

$$Cubic'_{12}(x_{i-1}) = \frac{Cubic'_1(x_{i-1}) + Cubic'_2(x_{i-1})}{2} \quad (4)$$

i 点の勾配は式 (2) および式 (3) を 1 階微分し、両者の平均で評価する。

$$Cubic'_{23}(x_i) = \frac{Cubic'_2(x_i) + Cubic'_3(x_i)}{2} \quad (5)$$

$i-1/2$ 点の勾配は式 (2) を 1 階微分して評価する。

$$Cubic'_2(x_{i-1/2}) = f'_2(C_{i-2}, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, x_{i-1/2}) \quad (6)$$

式 (4) ~ (6) および C_{i-1} , C_i 点を用いて以下に示す 2 個の 3 次曲線を構築する。

$$Cubic_A(x) = f_A(C_{i-1}, C_i, Cubic'_{12}(x_{i-1}), Cubic'_2(x_{i-1/2}), x) \quad (7)$$

$$Cubic_B(x) =$$

キーワード：6-point scheme, 数値計算, 移流項, 特性曲線法

連絡先：〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学工学部社会建設工学科 Tel.0836-85-9318 Fax.0836-85-9301

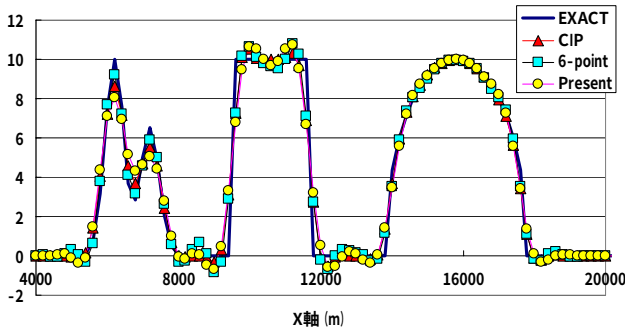


図-2 計算結果 (9600sec)

$$f_B(C_{i-1}, C_i, Cubic'_{23}(x_i), Cubic'_2(x_{i-1/2}), x) \quad (8)$$

式 (7) と式 (8) の平均が新たな 3 次精度 6-point scheme である。

$$Cubic(x) = \frac{Cubic_A(x) + Cubic_B(x)}{2} \quad (9)$$

最終形を以下に示す。

$$C_i^{n+1} = P_1 C_{i-3}^n + P_2 C_{i-2}^n + P_3 C_{i-1}^n + P_4 C_i^n + P_5 C_{i+1}^n + P_6 C_{i+2}^n \quad (10)$$

ここで、

$$P_1 = -\alpha^2 / 24 + \alpha / 24$$

$$P_2 = \alpha^3 / 6 + \alpha^2 / 8 - 7\alpha / 24$$

$$P_3 = -\alpha^3 / 2 + 5\alpha^2 / 12 + 13\alpha / 12$$

$$P_4 = \alpha^3 / 2 - 13\alpha^2 / 12 - 5\alpha / 12 + 1$$

$$P_5 = -\alpha^3 / 6 + 5\alpha^2 / 8 - 11\alpha / 24$$

$$P_6 = -\alpha^2 / 24 + \alpha / 24$$

$$\alpha = u\Delta t / \Delta x ; \text{クーラン数}$$

朝位ら⁴⁾に従い、3次精度 6-point scheme を保存形式表示すれば以下ようになる。

$$C_{i+1/2}^n = B_1 C_{i-2}^n + B_2 C_{i-1}^n + B_3 C_i^n + B_4 C_{i+1}^n + B_5 C_{i+2}^n \quad (11)$$

ここで、

$$B_1 = -\alpha / 24 + 1 / 24$$

$$B_2 = \alpha^2 / 6 + \alpha / 12 - 1 / 4$$

$$B_3 = -\alpha^2 / 3 + \alpha / 2 + 5 / 6$$

$$B_4 = \alpha^2 / 6 - 7\alpha / 12 + 5 / 12$$

$$B_5 = \alpha^2 / 24 - 1 / 24$$

テイラー級数解析による打ち切り誤差は以下のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D_4 \frac{\Delta x^4}{4! \Delta t} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + D_5 \frac{\Delta x^5}{5! \Delta t} \frac{\partial^5 C}{\partial x^5} + O(\Delta x^6) \quad (12)$$

ここで、

$$D_4 = -\alpha^2 (\alpha - 1)^2, \quad D_5 = \alpha (\alpha - 1) (\alpha^3 + \alpha^2 - 4\alpha + 1)$$

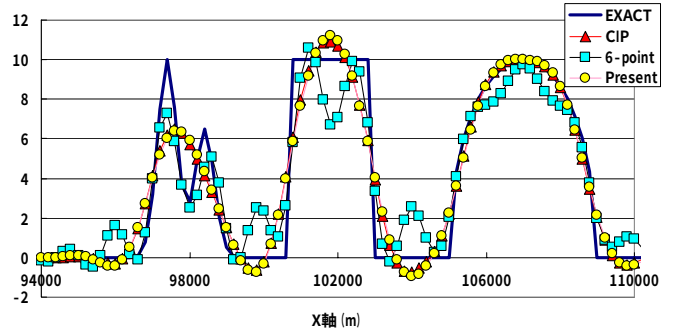


図-3 計算結果 (192000sec)

4. モデル計算

得られたスキームの計算精度を確認するためモデル計算を行った。初期条件として中心位置 1400m, 標準偏差 264m, 最大値 10 と中心位置 2400m, 標準偏差 264m, 最大値 6.5 の二つのガウス分布, 幅 1000m の矩形分布および $x=5800m$ でピーク値 10 を持つ半径 2000m の半楕円分布の重ね合わせである。計算格子間隔は $\Delta x=200m$, $\Delta t=100sec$ である。一定流速 $u=0.5m/sec$ で 9600sec および 192000sec 輸送させる。計算結果を図-2, 3 に示す。短い時間では従来の 6-point scheme がガウス分布のピーク値の再現性に優れている。長時間になると楕円分布の頂上近傍で従来の 6-point scheme は再現性が悪くなる。一方, 3 次精度 6-point scheme は CIP 法と同様の分布の再現能力を有する。

参考文献

- 1) Yabe, T. and Aoki, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, 66, pp.219-232, 1991
- 2) Holly, F.M. Jr and Preissmann, A.: Accurate calculation of transport in two dimensions, *J. Hydraul. Div., Proc. of ASCE*, Vol.103, No. HY11, pp.1259-1277, 1977
- 3) Komatsu, T., Holly, F.M. Jr, Nakashiki, N. and Ohgushi, K.: Numerical calculation of pollutant in one and two dimensions, *J. Hydrosoci. and Hydraul. Eng., JSCE*, Vol.3, No.2, pp.15-30, 1985
- 4) 朝位孝二, 小松利光, 大串浩一郎, 羽田野袈裟義: 移流輸送の高精度かつ高解像度数値計算手法の開発, *水工学論文集*, 第 43 巻, pp.497-502, 1999