

地盤統計学による透水係数分布のモデル化とパラメータ更新に対する感度影響評価

京都大学防災研究所 正会員 浜口 俊雄

1. 序論

地下水解析では、その挙動が複雑であっても観測データの量と質に見合う地下水モデルで考察することが望まれる。特に、物性値の空間分布設定が解析の再現精度の良し悪しを左右する。いま議論を簡素化すべく、有効間隙率一定として不均一な透水係数分布を同定対象に絞る。所与の観測条件(数量・質・配置など)に対して求める透水係数の区域数が多い場合、非適切な(ill-posed)逆問題となる。本稿では、既往のアプローチ¹⁾を踏まえて非適切性を克服し、感度を評価しつつ透水係数分布を同定する手法を提案する。

2. 地下水モデルの有限要素方程式

ここでは平面不圧地下水モデルを考え、さらに、議論の明瞭化のために基礎方程式には線形化した式(1)を用いる。この式の有限要素方程式として式(2)~(5)が得られ、これを境界条件の水位で縮約した後に次時刻水位に関して解くと式(6)のようになる。

3. 分布モデルの適用

条件3に対処するため、透水係数値、ないしは、その常用対数値が空間連続的に分布しているという仮定の下で、同分布モデルとして Ordinary block kriging(OBK)による地盤統計モデルを当てはめる。最大の長所は透水係数の空間不均一性をひとまとめで扱うことで、未知数を同一透水係数の区域数(要素数)から OBK パラメータ数まで減らし、観測数>未知数を実現させて、条件1,3を同時に満す状態にする点にある。OBKによる透水係数分布モデルは式(7),(8)の様に書ける。そこでの共分散関数は式(9)で与えている。なお、桁が異なる透水係数分布を想定する際は、式(7)の $k^*(\mathbf{x})$ を $\log k^*(\mathbf{x})$ 、 $\hat{k}_0$ を $\log \hat{k}_0$ と置き換えて対応すればよく、本手法の一般性は失われない。

4. 一意解算出の3条件

実務においてはパラメータ同定に非適切な問題、特に「観測数<未知数」となるケースに頻繁に遭遇する。そこで同ケースに直面しても観測データから安定した一意な

同定解を得られる策を講じる。いま、「観測数>未知数」における最適解も連立解と見なした上で同定解を考えると、少なくとも表1に掲げた3条件が満たされていなければならない。条件1は方程式の可解性から自明である。条件2は類似性データを除いても、パラメータ同定のためのデータ数は充足しているという条件を意味する。条件3は観測データからパラメータ同定値を更新する際の、観測データの影響圏とパラメータ区域化(分布化)との関係を述べたものである。各区域で観測からの更新感度を向上する方策としては、局所再現性(モデルの緻密さ)を犠牲にしつつ、透水係数分布を粗く再区域化した上で、その新たな分布を同定するの

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \varepsilon \quad (1)$$

(λ : 有効間隙率, h : 水位, k : 透水係数, d_0 : 平均水深, ε : 涵養量)

$$\mathbf{A} \mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{B} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \quad (2)$$

(注: 両辺は境界水位で縮約済)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \theta \mathbf{S}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} - (1 - \theta) \mathbf{S}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \lambda \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} dV, \quad \mathbf{S} = \int_V k d_0 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial z_i} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial z_i} dV, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \boldsymbol{\phi}^T dS + \int_V \varepsilon \boldsymbol{\phi}^T dV \quad (5)$$

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}) \quad (6)$$

$$k^*(\mathbf{x}) = \hat{k}_0 + \mathbf{c}(\mathbf{x})^T \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (7)$$

$$\text{ただし, } \hat{k}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}}, \quad \hat{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\alpha} \hat{k}_0 \quad (8)$$

$$\mathbf{C}(d) = \begin{cases} \sigma^2 \left\{ 1 - 1.5 \left(\frac{d}{a} \right) + 0.5 \left(\frac{d}{a} \right)^3 \right\} & (0 \leq d \leq a) \\ 0 & (d > a) \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_t^T = \{ \mathbf{h}_t^T, \boldsymbol{\eta}_t^T \}^T = \{ \mathbf{h}_t^T, (\sigma^2)_t, (a)_t \}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{h}_{t+1}}{\partial \mathbf{h}_t} \right)_{\mathbf{h}_t = \hat{\mathbf{h}}_{t/t}} & \left(\frac{\partial \mathbf{h}_{t+1}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \right)_{\boldsymbol{\zeta}_t = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{t/t}} \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_{t+1}}{\partial \mathbf{h}_t} \right)_{\mathbf{h}_t = \hat{\mathbf{h}}_{t/t}} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_{t+1}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \right)_{\boldsymbol{\zeta}_t = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{t/t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{hh} & \mathbf{J}_{h\zeta} \\ \mathbf{J}_{\zeta h} & \mathbf{J}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{J}_{hh} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{J}_{\zeta h} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}_{\zeta\zeta} = \mathbf{I}_2 \quad (12)$$

$$\mathbf{J}_{h\zeta} = \mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t/t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t} \right) \quad (13)$$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial k_t} \text{ とおくと, } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} = \theta \mathbf{T} \frac{\partial k_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} = -(1 - \theta) \mathbf{T} \frac{\partial k_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \quad (14)$$

$$\frac{\partial k_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} = \left\{ \left(\frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha} - 1}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\alpha}^T - \mathbf{c}(\mathbf{x})^T \right) \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} + \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \right\} \left\{ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \right\} \boldsymbol{\phi} \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_{h\zeta} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{T} \frac{\partial k_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \{ (1 - \theta) \hat{\mathbf{h}}_{t/t} + \theta \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t} \} \quad (16)$$

表 1: 一意解を得る必要条件

条件1	観測数 ≥ 未知数
条件2	共線性のあるものを除いても条件1を満たしている観測データの採取と確認
条件3	パラメータの区域化に伴う各区域での観測更新感度の確保

Key words: 透水係数, 分布モデル, 地盤統計学, 同定, 感度影響評価

〒611-0011 宇治市五ヶ庄 TEL: 0774-38-4262 FAX: 0774-38-4262

が既往の妥当な策である．区域化の変更をせずに求める同定解は，先験/事前情報の利用で局所解と正解とが区別し易くなるが，区域パラメータが互いに独立なために更新感度は上がらない．

5. 観測による更新感度評価

事前情報を利用し，かつ，観測データの質を逐次考慮して同定結果に反映させるため，拡張 Kalman フィルタ有限要素法^{2),3)}を採用することにした．ここでは水位を観測し，透水係数を同定していくため，同定システムの状態変数 $\boldsymbol{x}_t$ を式 (10) のように与える．ただし， $\hat{k}_0$ は他のパラメータ 2 つが決まると自動的に決まる従属変数のため，式 (10) には含めていない． $\boldsymbol{x}_t$ の時間更新に関する感度を表す状態遷移行列 $\boldsymbol{F}_t$ は式 (11)～(13) で計算される．特に小行列 $\boldsymbol{J}_{h\zeta}$ は，区域単位の時定時に $\partial \boldsymbol{h}_{t+1} / \partial (\log \boldsymbol{k}_t)$ だったものが，本手法の検討時には式 (14), (15) を経て式 (16) で示す量に置き換わっている．一見複雑そうであるが，成分の数が減った分，計算負荷も減らせている．式 (11) により感度が評価できるが，区域単位の時定時と違って，式 (16) からに対して透水係数分布モデルパラメータの更新に対する，領域全体の水位への感度がある (成分が 0 でない) ことがわかる．

6. 数値実験

ここで提案した分布モデルに対しての時定精度について検討すべく，図 1 のような不圧地下水の流れる仮想帯水層を対象として数値実験を行った．この帯水層の不透水基盤面は，流れ断面が谷状になっており，流下方向には一定傾斜している．図中の○印は水位観測点 (9 点)，□印は揚水位置 (3 点) で，最下流端部は 0m の水位境界である．また図の上流端 (地下水集水域) と地表面からの地下水涵養があるものと設定した．透水係数の観測は， Z_1, Z_7, Z_{16}, Z_{18} にて，そこでの一要素以上に大きくならない影響圏での原位置試験ないしは室内要素試験で観測値が得られると考える．真の透水係数分布は図 2 の様に設定した．まず，各区域毎 (未知数 20 個) に同定を行ったところ，図 3 に記したような結果となった．観測点に近い区域と距離のある区域とでは解の精度に差が出ており，未知数に対する観測数の少なさという非適切条件の影響と観測更新感度の鈍さが出ていることがわかる．続いて，OBK モデルによる透水係数分布 (未知数 η) の同定を行った．その結果， $\hat{k}_0=243.7905(\text{m/day})$ ， $\sigma^2=20.0(\text{m}^2/\text{day}^2)$ ， $a=1000.0(\text{m})$ が得られた．これらを式 (7)～(9) に代入して，OBK によるモデル分布を算出した結果が図 4 である．これは真の分布と全く同じものが得られており，一意性もある同定解を求めることに有効であるとわかる．

7. 結論

本手法では不均一な透水係数分布同定に関して，区域単位でなく，その空間相関性から OBK による分布モデルを導入したところ，非適切性を克服して高精度の一意解が得られたことから．この様な分布を観測データから同定するには非常に秀逸な手段であるといえる．

参考文献

1) 例えば，逆解析の地盤工学への適用に関する研究委員会：基礎理論 WG 報告，地盤工学における逆解析の適用と施工管理に関するシンポジウム発表論文集，地盤工学会，pp.1-52, 1997. 2) 例えば，長谷川高士，村上 章，浜口俊雄：拡張 Kalman フィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定，土木学会論文集，No.505/III-29, 1994. 3) 浜口俊雄，村上 章，長谷川高士：平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用，土木学会論文集，No.568/III-39, pp.133-145, 1997.

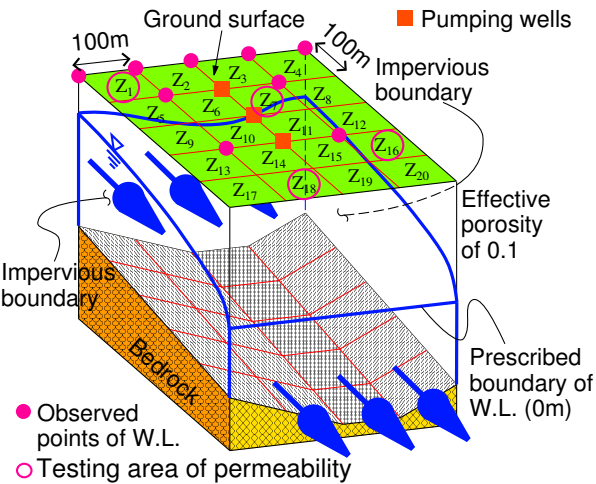


図 1: 仮想帯水層

Exact	215.3322 (Z ₄)	255.5558 (Z ₈)	321.1791 (Z ₁₂)	400.0000 (Z ₁₆)	383.3276 (Z ₂₀)
	173.9983 (Z ₃)	200.0000 (Z ₇)	272.5400 (Z ₁₁)	329.4123 (Z ₁₅)	346.6049 (Z ₁₉)
	136.6654 (Z ₂)	171.4817 (Z ₆)	226.1393 (Z ₁₀)	273.9904 (Z ₁₄)	300.0000 (Z ₁₈)
	100.0000 (Z ₁)	146.4934 (Z ₅)	194.3980 (Z ₉)	235.9593 (Z ₁₃)	265.2360 (Z ₁₇)
	Unit: m/day				

図 2: 真の透水係数空間分布

Piece-wise	219.3408 (Z ₄)	263.1140 (Z ₈)	289.9044 (Z ₁₂)	382.6352 (Z ₁₆)	380.4207 (Z ₂₀)
	168.8113 (Z ₃)	224.7142 (Z ₇)	254.9413 (Z ₁₁)	348.1349 (Z ₁₅)	352.3683 (Z ₁₉)
	135.8332 (Z ₂)	185.8441 (Z ₆)	215.4022 (Z ₁₀)	273.9089 (Z ₁₄)	295.5448 (Z ₁₈)
	101.7502 (Z ₁)	144.2885 (Z ₅)	180.1621 (Z ₉)	237.3977 (Z ₁₃)	260.8399 (Z ₁₇)
	Unit: m/day				

図 3: 分布同定結果 (区域単位)

Using OBK	215.3322 (Z ₄)	255.5558 (Z ₈)	321.1791 (Z ₁₂)	400.0000 (Z ₁₆)	383.3276 (Z ₂₀)
	173.9983 (Z ₃)	200.0000 (Z ₇)	272.5400 (Z ₁₁)	329.4123 (Z ₁₅)	346.6049 (Z ₁₉)
	136.6654 (Z ₂)	171.4817 (Z ₆)	226.1393 (Z ₁₀)	273.9904 (Z ₁₄)	300.0000 (Z ₁₈)
	100.0000 (Z ₁)	146.4934 (Z ₅)	194.3980 (Z ₉)	235.9593 (Z ₁₃)	265.2360 (Z ₁₇)
	Unit: m/day				

図 4: 分布同定結果 (OBK モデル)